АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ГЕОЛОГИЯ
и
ГЕОФИЗИКА

Отдельный оттиск

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ГЕОЛОГИЯ И ГЕОФИЗИКА

№ 6 1970

КРАТКИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 538.123+528.21.0.001.5

М. С. ЖДАНОВ

О СВЯЗИ ОСОБЫХ ТОЧЕК ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛОВ С ФОРМОЙ КОНТАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работах [1, 2] Б. А. Андреевым была высказана мысль о том, что изломы, угловые перегибы и другие неправильности поверхности возмущающего тела представляют вместе с тем особые точки для соответствующих гармонических и образуемых ими аналитических функций. Положение же этих особых точек или источников, определяющих самую структуру аномального потенциального поля, принципиально определяется однозначно.

В ряде работ других авторов эта гипотеза, физически достаточно очевидная, принималась как доказанная. Однако в действительности математические доказательства этого положения до сих пор ограничивались лишь некоторыми частными случаями [3, 6, 7] для тел простой формы. Это обстоятельство давало, очевидно, возможность сомневаться в гипотезе Б. А. Андреева некоторым авторам [4, 5].

Ниже мы попытаемся дать математическое доказательство идеи, высказанной Б. А. Андреевым, для возмущающих тел, ограниченных произвольным замкнутым контуром (рассматривается пока двумерный случай), показав, что геометрические особенности этого контура совпадают в пространстве с особенностями гармонической (аналитической) функции, заданной вне возмущающего тела.

Предварительно напомним некоторые понятия и определения.

1. Особыми точками аналитической (гармонической) функции называются точки, в которых эта аналитичность (гармоничность) нарушается.

2. Особыми точками кривой (контура) в геометрическом смысле называются те точки, где отрезок кривой, заключенный в любой (малой) окрестности этих точек, нельзя поставить во взаимно однозначное, взаимно непрерывное и дифференцируемое соответствие с некоторым отрезком прямой линии.

3. Потенциальная функция и ее производные вне возмущающей массы везде гармоничны, т. е. удовлетворяют уравнению Лапласа и не имеют разрывов.

4. Потенциальная функция, заданная в некоторой области, имеет в пространстве хотя бы одну особую точку. В противном случае она тождественно равна нулю.

Из пунктов 3 и 4 следует, что если рассматривать ограниченное некоторым контуром возмущающее тело, то *особые точки* потенциальной функции, соответствующей действию этого тела, *находятся только внутри возмущающего тела или на контуре, его ограничивающем**.

Заметим, что понятие особой точки кривой линии в общем случае никак не связано с понятием особой точки аналитической функции. Это совершенно различные понятия, возникшие в разных математических теориях. В то же время оказывается, что с точки зрения изучения гравитационного и магнитного потенциалов эти два понятия теснейшим образом связаны между собой.

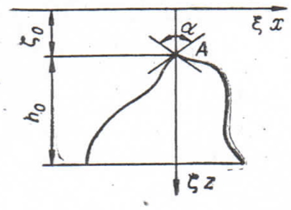

Рис. 1.

А именно: *всякая точка контура поперечного сечения возмущающего тела, особая в геометрическом смысле, является особой и для соответствующих потенциальных функций в теоретико-аналитическом смысле.*

Пусть A — особая точка кривой Γ, ограничивающей возмущающее тело однородной плотности $\sigma>0$. Доказательство данного выше критерия мы будем проводить для того случая, когда геометрическая особенность в точке A имеет вид, представленный на рис. 1, т. е. когда у кривой Γ в точке A направления правой и левой касательных образуют между собой угол α, отличный от 0 и 180°.

В системе координат, указанной на рис. 1, выражение для второй вертикальной производной потенциала притяжения вдоль оси z можно записать в виде

$$V_{zz}(z) = 2f\sigma \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_0+h_0} \varphi(\zeta, z)\, d\zeta; \; z<\zeta_0,$$

где $\varphi(\zeta, z)$ — некоторая функция, зависящая от формы возмущающего тела в окрестности особой точки A (отметим, что все исследование проводится локально, в некоторой окрестности особых точек).

Можно показать, что $\varphi(\zeta, z)$ обладает следующими свойствами:

1. $\varphi(\zeta, z) \geqslant 0$ при $\begin{array}{l} 0 \leqslant z \leqslant \zeta_0; \\ \zeta_0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0 + h_0. \end{array}$

2. $\varphi(\zeta, z)$ непрерывна в

$$\overline{\Pi} = \left\{ \begin{array}{c} \zeta_0+\delta_0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0 + h_0 \\ 0 \leqslant z \leqslant \zeta_0 \end{array} \right\},$$

где δ_0 — любое малое положительное число; $\overline{\Pi}$ — замкнутое и ограниченное, следовательно, компактное множество.

3. $\lim\limits_{\zeta\to\zeta_0} (\zeta-\zeta_0)\cdot\varphi(\zeta, \zeta_0) = c \neq 0.$

Заметим, что последнее свойство выполняется в окрестности лишь *особой точки* кривой.

Из свойства 3 непосредственно следует, что

$$2f\sigma \int\limits_{\zeta_0+\delta}^{\zeta_0+h_0} \varphi(\zeta, \zeta_0)\, d\zeta \underset{\delta\to 0}{\to} \infty. \quad (1)$$

Оценим теперь величину V_{zz}.

* Если рассматривать полную аналитическую функцию (в смысле Вейерштрассе), полученную путем аналитического продолжения данной потенциальной функции, то некоторые ветви этой функции (а именно те, которые возникают при продолжении функции через область, занятую возмущающими массами) могут иметь особенности вне возмущающих масс. В данной работе мы исследуем лишь ту ветвь, которая не имеет особенностей вне масс.

$$\left|V_{zz}(z)\right| = \left|2f\sigma \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_0+h_0} \varphi(\zeta,z)\,d\zeta\right| = 2f\sigma\cdot\left|\int\limits_{\zeta_0+\delta_0}^{\zeta_0+h_0}\{\varphi(\zeta,z)-\varphi(\zeta,\zeta_0)\}\,d\zeta\, +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{\zeta_0+\delta_0}^{\zeta_0+h_0}\varphi(\zeta,\zeta_0)\,d\zeta + \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_0+\delta_0}\varphi(\zeta,z)\,d\zeta\right| > 2f\sigma\left|\int\limits_{\zeta_0+\delta_0}^{\zeta_0+h_0}\varphi(\zeta,\zeta_0)\,d\zeta\, +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_0+\delta_0}\varphi(\zeta,z)\,d\zeta\right| - 2f\sigma\int\limits_{\zeta_0+\delta_0}^{\zeta_0+h_0}\left|\varphi(\zeta,\zeta_0)-\varphi(\zeta,z)\right|d\zeta.$$

В силу (1) для сколь угодно большого M можно выбрать столь малое δ_0, что

$$2f\sigma\int\limits_{\zeta_0+\delta_0}^{\zeta_0+h_0}\varphi(\zeta,\zeta_0)\,d\zeta > M+1.$$

Тогда учитывая, что $\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_0+\delta_0}\varphi(\zeta,z)\,d\zeta > 0$ в силу свойства 1 функции φ, продолжим неравенства

$$\left|V_{zz}(z)\right| > M+1-2f\sigma\int\limits_{\zeta_0+\delta_0}^{\zeta_0+h_0}\left|\varphi(\zeta,\zeta_0)-\varphi(\zeta,z)\,d\zeta \geqslant {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}.\right.$$

Функция $\varphi(\zeta, z)$ непрерывна в $\overline{\Pi}$, но $\overline{\Pi}$ — компактное множество, следовательно, $\varphi(\zeta, z)$ равномерно непрерывна в $\overline{\Pi}$, т. е. для любого $\varepsilon>0$, например для $\varepsilon=1/4f\sigma h_0$, найдется такое $\delta>0$, что как только $\zeta_0-z<\delta$, то $|\varphi(\zeta,\zeta_0)-\varphi(\zeta,z)|<\varepsilon$ для $\zeta_0+\delta_0\leqslant\zeta\leqslant\zeta_0+h_0$.

Следовательно,

$$\int\limits_{\zeta_0+\delta_0}^{\zeta_0+h_0}\left|\varphi(\zeta,\zeta_0)-\varphi(\zeta,z)\right|d\zeta<\int\limits_{\zeta_0+\delta_0}^{\zeta_0+h_0}\varepsilon\,d\zeta<\frac{1}{4f\sigma}. \qquad (2)$$

Учитывая (2), продолжим неравенства

$${}^{*}_{*}{}^{*}_{*} > M+1-\frac{2f\sigma}{4f\sigma}\geqslant M+1-\frac{1}{2}>M.$$

Итак, для любого наперед заданного числа M мы нашли число $\delta>0$ такое, что как только $0<\zeta_0-z<\delta$, то $|V_{zz}(z)|>M$.

Это значит, что $|V_{zz}(z)|\to\infty$ при $z\to\zeta_0-0$. Следовательно, точка A, особая в геометрическом смысле, является также особой точкой потенциала силы тяжести как аналитической функции.

Мы ограничились исследованием только тех геометрических особенностей, где левые и правые касательные не совпадают по направлению. Однако аналогично можно провести анализ поведения потенциального поля в окрестности контура с любым типом геометрической особенности. Например, в особой точке типа «острия» (угол между левой и правой касательными $\alpha=180°$) терпит бесконечный разрыв 3-я вертикальная производная потенциала $V_{zzz}=\dfrac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}$ (рис. 2).

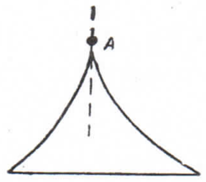

Рис. 2.

В заключение следует отметить, что в приведенном выше доказательстве, по существу, не использовалась двумерность рассматриваемой модели.

Автор в дальнейшем намерен обобщить полученный результат на трехмерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Б. А. Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике, ч. II. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1949, № 3.
2. Андреев Б. А., Клушин И. Г. Геологическое истолкование гравитационных аномалий. Гостоптехиздат, 1962.
3. Голиздра Г. Я. Распределение особых точек гравитационного поля для одного класса двумерных тел. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1963, № 11.
4. Маловичко А. К. Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки. Гостоптехиздат, 1956.
5. Маловичко А. К., Чадаев М. С. Об особых точках потенциала и их значение при интерпретации гравитационных аномалий. Прикл. геофиз., вып. 46, 1965.
6. Шалаев С. В. Об использовании особых точек потенциальных полей при интерпретации геофизических данных. Прикл. геофиз., вып. 33, 1966.
7. Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки. Новосиб. ун-т, 1966.

Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. И. М. Губкина

Статья поступила в редакцию 16 августа 1968 г.

УДК 550.831

Б. П. ВАТЛИН

К РАСЧЕТУ НОРМЫ И СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛОВ

В настоящее время при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий широко используются понятия нормы и скалярного произведения в пространстве функций L_2. В связи с этим в предлагаемой работе приводятся формулы расчета этих величин для некоторых производных потенциала.

Нормой функции $V(x)$ в $L_2(-\infty, \infty)$ называется величина

$$\| V \| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} V^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

и скалярным произведением функций $V(x)$ и $U(x)$ —

$$(V, U) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x)\, U(x)\, dx.$$

Если поля $V^{(s)}$ и $V^{(p)}$ создаются зарядами областей S и P соответственно (двумерная задача), то их скалярное произведение определится из равенства

$$(V^{(s)}, V^{(p)}) = \iint_S dx_1\, dz_1 \iint_P f(x_1, z_1, x_2, z_2)\, dx_2\, dz_2, \qquad (1)$$

где $f(x_1, z_1, x_2, z_2)$ — скалярное произведение полей двух элементарных зарядов: из S с координатами x_1, z_1 и из P с координатами x_2, z_2. При