АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ГЕОЛОГИЯ И ГЕОФИЗИКА № 2

(Отдельный оттиск)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
НОВОСИБИРСК
1973

А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ГЕОЛОГИЯ И ГЕОФИЗИКА

№ 2 1973

УДК 550.831

М. С. ЖДАНОВ

К ПРОБЛЕМЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

При аналитическом продолжении потенциальных полей обычно предполагается, что источники исследуемых полей расположены в нижней полуплоскости, т. е. поля описываются гармоническими во всей полуплоскости функциями. Это допущение справедливо при анализе гравитационных и магнитных аномалий, однако, при исследовании некоторых других геофизических полей (например, поля постоянного тока в проводящей среде или переменного магнитного поля в непроводящей среде) возникает необходимость построения методов аналитического продолжения при условии, что источники поля находятся как в нижней полуплоскости (источники аномальной части поля), так и в верхней полуплоскости (первичные или внешние источники поля).

Аналогичная задача возникает также при продолжении полей в криволинейные области, примыкающие к горизонтальной оси (профилю наблюдения), для чего используются конформные отображения криволинейной области на горизонтальную полосу.

В статье рассматриваются общие аналитические методы решения указанных задач.

Предположим, что функция $W(\Omega)$, описывающая комплексную напряженность исследуемого двумерного потенциального поля, задана на горизонтальной оси — x. Ось z направлена вертикально вверх. Известно, что функция $W(\Omega)$ аналитична в некоторой полосе P_H: $\{0 \geqslant z \geqslant -H\}$ вплоть до ее границы, имеет особые точки при $z > 0$ и при $z < -H$ и удовлетворяет условию:

$$\lim_{R \to \pm\infty} W(R + iz) = 0, \tag{1}$$

где $0 \geqslant z \geqslant -H$. Необходимо найти значение функции $W(\Omega)$ в произвольной точке $\Omega_0 \in P_H$. Для решения поставленной задачи проведем на некотором расстоянии R от начала координат два вертикальных отрезка прямых, соединяющих ось X и прямую $z = -H$. Обозначим эти отрезки через C_R^+ и C_R^-. Радиус R выберем столь большим, чтобы точка Ω_0 оказалась внутри прямоугольника Π_R, образованного отрезками C_R^+, C_R^- и отсекаемыми ими отрезками оси x и прямой $z = -H$ (рис. 1).

Согласно интегральной формуле Коши:

$$W(\Omega_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Pi_R} \frac{W(\Omega)}{\Omega - \Omega_0} d\Omega, \tag{2}$$

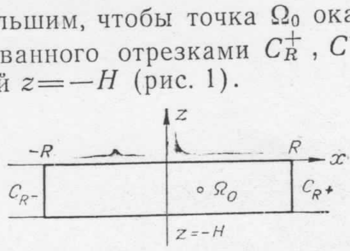

Рис. 1.

где контур Π_R обходится против часовой стрелки.

Интеграл (2) можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$W(\Omega_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R}^{-R}\frac{W(x)}{x-\Omega_0}\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R^-}\frac{W(\Omega)}{\Omega-\Omega_0}\,d\Omega +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R}^{R}\frac{W(x-iH)}{x-iH-\Omega_0}\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R^-}\frac{W(\Omega)}{\Omega-\Omega_0}\,d\Omega. \tag{3}$$

Перейдем в (3) к пределу, устремив $R\to\infty$. Тогда, в силу условия (1), интегралы по отрезкам C_R^+ и C_R^- обратятся в нуль, и мы получим

$$W(\Omega) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\infty}^{-\infty}\frac{W(x)}{x-\Omega_0}\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{W(x-iH)}{x-iH-\Omega_0}\,dx. \tag{4}$$

При условии

$$-H < \operatorname{Im}\Omega_0 < 0$$

справедливо разложение:

$$\frac{1}{i(x-\Omega_0)} = \int\limits_{0}^{-\infty} e^{-i\omega(x-\Omega_0)}\,d\omega; \tag{5}$$

$$\frac{1}{i(x-iH-\Omega_0)} = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-i\omega(x-iH-\Omega_0)}\,d\omega. \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим

$$W(\Omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{-\infty} e^{i\omega\Omega_0}\int\limits_{\infty}^{-\infty} W(x)\,e^{-i\omega x}\,dx\,d\omega +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{i\omega\Omega_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(x-iH)\,e^{-i\omega(x-iH)}\,dx. \tag{7}$$

В силу (1) и аналитичности произведения $W(\Omega)e^{-i\omega\Omega}$ в полосе P_H справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(x-iH)\,e^{-i\omega(x-iH)}\,d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(x)\,e^{-i\omega x}\,dx. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7) и объединяя первое слагаемое в (7) со вторым, имеем

$$W(\Omega_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\Omega_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(x)\,e^{-i\omega x}\,dx\,d\omega. \quad)$$

Примем, что $\Omega_0 = x_0 - ih$, тогда

$$W(x_0-ih) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x_0}e^{\omega h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(x)\,e^{-i\omega x}\,dx\,d\omega. \tag{10}$$

В частном случае, когда функция $W(\Omega)$ аналитична во всей верхней полуплоскости, интеграл по частоте ω от $-\infty$ до 0 равен нулю и равенство (10) превращается в известную формулу:

$$W(x_0-ih)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{i\omega x_0}e^{\omega h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(x)e^{-i\omega x}\,dx\,d\omega. \tag{11}$$

Таким образом, частотная характеристика $\Phi(\omega)$ пересчета вниз поля, имеющего особенности как над осью x, так и под ней, принимает вид:

$$\Phi(\omega)=e^{\omega h};\quad -\infty<\omega<+\infty, \tag{12}$$

в то время как частотная характеристика пересчета вниз аномальных полей, аналитических всюду в верхней полуплоскости, равна

$$\Phi_a(\omega)=\begin{cases}0; & -\infty<\omega<0,\\ e^{\omega h}; & 0\leqslant\omega<\infty.\end{cases} \tag{13}$$

Рассмотрим теперь задачу аналитического продолжения функции $W(\Omega)$ в криволинейную область P_Γ, ограниченную осью x и некоторой кривой Γ (рис. 2):

$$\Gamma:\Omega=\Omega(t);\ a<t<b$$
$$f_1\leqslant \operatorname{Im}\Omega(t)\leqslant 0;\quad f_1<0.$$

Решение поставленной задачи имеет большое практическое значение при интерпретации потенциальных геофизических полей различной природы. Например, в морской геофизике путем аналитического продолжения на дно морей и океанов полей, измеренных на водной поверхности, можно избавиться от искажающего влияния толщи морской воды на изучаемые поля (снять «эффект океана»). В платформенных районах, продолжая геомагнитные поля (постоянные и переменные — в непроводящей среде) с поверхности Земли на кровлю кристаллического фундамента, можно получить более полные сведения о внутреннем строении фундамента (снять «эффект осадочного чехла»). Наконец, аналитическое продолжение полей в разнообразные по форме криволинейные области, «зондирующие» недра Земли, является непосредственным орудием для поиска особых точек потенциальных полей.

Методы решения рассматриваемой задачи в настоящее время интенсивно развиваются [1—6], причем в основе почти всех предложенных методов лежит естественная идея использования конформных отображений, позволяющих свести задачу аналитического продолжения с криволинейными границами к хорошо изученной задаче аналитического продолжения в области с прямолинейными горизонтальными границами.

В работах [2, 3] при рассмотрении функций, аналитических во всей верхней полуплоскости, для этой цели нами использовалось конформное отображение всей верхней полуплоскости Π_Γ, ограниченной кривой Γ, на полуплоскость Π_H, ограниченную горизонтальной прямой. С помощью таких отображений в [3] были построены общие интегральные формулы аналитического продолжения потенциальных полей. Однако в ряде случаев бывает удобно применять для решения поставленной задачи конформное отображение криволинейной области P_Γ на горизонтальную полосу [5].

Рис. 2.

В настоящей статье мы покажем, что и при таком подходе возможно построение общей интегральной формулы для аналитического продолжения, аналогичной формуле (10) работы [3].

Рассмотрим вспомогательную плоскость комплексного переменного $s=\xi+i\zeta$ (рис. 2). Обозначим через P_H^* горизонтальную полосу на плоскости s, ограниченную осью ξ и прямой $\xi=-H$.

Пусть функция $\Omega=\sigma(s)$ осуществляет конформное отображение горизонтальной полосы P_H^* на криволинейную область P_Γ, причем так, что ось ξ переходит в ось x, а прямая $\zeta=-H$ в кривую Γ.

Следуя работам [2, 3], рассмотрим функцию $\widetilde{W}(s)=W(\sigma(s))$, получающуюся в результате антиувлечения функции $W(\Omega)$ на плоскость s посредством отображения $\sigma(s)$. Функция $\widetilde{W}(s)$ аналитична в полосе P_H^* в силу аналитичности исходной функции $W(\Omega)$ в криволинейной области P_Γ. Отметим, что функция $\widetilde{W}(s)$ может иметь особые точки в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} s>0$ вне зависимости от того, аналитична или нет исходная функция $W(\Omega)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\Omega>0$. Поэтому для аналитического продолжения функции $\widetilde{W}(s)$ в горизонтальную полосу даже в том случае, когда $W(\Omega)$ описывает аномальные гравитационные и магнитные поля, нельзя воспользоваться обычными формулами аналитического продолжения аномальных полей в горизонтальную полосу.

В работах [5, 6] указанная трудность преодолевается путем разложения гармонической функции, описывающей исходное поле, на две составляющие — четную по переменной Z функцию и функцию, гармоническую во всей нижней полуплоскости. Этот метод применим только для аномальных (не имеющих источников в верхней полуплоскости) потенциальных полей.

Нами рассматривается другой способ решения задачи, одинаково пригодный как для аномальных, так и для полных (имеющих особые точки в верхней полуплоскости) потенциальных полей. Метод основан на применении формулы (9) для продолжения вспомогательной функции $\widetilde{W}(s)$ в полосу P_H^*. Функции $W(\Omega)$ и $\widetilde{W}(s)$ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\widetilde{W}(s)=W(\sigma(s)); \quad W(\Omega)=\widetilde{W}(\sigma^{-1}(\Omega)), \tag{14}$$

где $\sigma^{-1}(\Omega)$ — отображение, обратное отображению $\sigma(s)$.

Так как функция $W(\Omega)$ задана на оси x, то функция $\widetilde{W}(s)$ известна на оси ξ. Рассмотрим любую точку $\Omega_0\in P_\Gamma$. Пусть $s_0=\sigma^{-1}(\Omega_0)$, тогда в силу формулы (9):

$$\widetilde{W}(s_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\xi_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{W}(\xi)\,e^{-i\omega\xi}\,d\xi\,d\omega. \tag{15}$$

Но $\xi=\sigma^{-1}(x)$, следовательно, учитывая соотношение (14), имеем

$$W(\Omega_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\sigma^{-1}(\Omega_0)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{W(x)e^{-i\omega\sigma^{-1}(x)}}{\frac{d\sigma}{dd}(\sigma^{-1}(x))}\,dx\,d\omega. \tag{16}$$

Полученная формула позволяет по значениям комплексно-аналитической функции $W(\Omega)$, заданной на оси x, определить значение этой функции всюду в пределах криволинейной области P_Γ. По своему строению формула (16) аналогична формуле (10), выведенной нами ранее в работе [3], однако, в отличие от последней, в ней внешний интеграл (по частоте ω) вычисляется в бесконечных пределах, т. е. взаимосвязь между формулами (10) работы [3] и (16) такая же, как между формулами (11) и (10).

Подобно тому, как это было сделано в работе [3], на базе соотношения (16) могут быть построены разнообразные вычислительные схемы для аналитического продолжения комплексных напряженностей потенциальных полей в криволинейные области.

В заключение отметим, что формула (16) в случае, когда рассматриваются аномальные (т. е. не имеющие особенностей в верхней полуплоскости) поля, может быть использована для нахождения значения функции $W(\Omega)$ в криволинейной области по ее действительной (или мнимой) части, заданной на оси x. Действительно, в этом случае, следуя работе [4], можно воспользоваться формулой Бейтмена [7], позволяющей восстанавливать функцию $W(\Omega)$ по аналитическому продолжению $U(\Omega)$ ее действительной части, заданной на горизонтальной оси, в комплексную область:

$$W(\Omega) = 2U(\Omega) - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x,0)}{\Omega - x}\, dx, \qquad (17)$$

где

$$U(x, 0) = \mathrm{Re} W(\Omega)|_{\Omega = x^0} .$$

Функция $U(\Omega)$ в формуле (17) вычисляется на основе формулы (16). Указанный прием удобен при аналитическом продолжении аномальных гравитационных полей, так как в гравиметрии обычно измеряется лишь одна — вертикальная составляющая напряженности гравитационного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Девицын В. М. Аналитическое продолжение двухмерных полей с помощью рядов Тейлора и локализация особых точек потенциальной функции. Прикл. геофиз., вып. 64, 1971.
2. Жданов М. С. О возможности использования теории конформных отображений для аналитического продолжения гравитационных и магнитных аномалий. В сб.: Нефть и газ, 1971.
3. Жданов М. С. Развитие теории аналитического продолжения в криволинейных областях (двумерные потенциальные поля). Физика Земли, 1971, № 5.
4. Страхов В. Н. Об аналитическом продолжении двумерных потенциальный полей в произвольные области нижней полуплоскости, примыкающие к оси OX. Физика Земли, 1970, № 6.
5. Страхов В. Н. Сеточные методы аналитического продолжения потенциальных полей с использованием конформных решеток. Физика Земли, 1971, № 10.
6. Страхов В. Н. К теории аналитического продолжения двумерных потенциальных полей методом конформных решеток. Физика Земли, 1971, № 11.
7. Bateman H. Some integral equation of potential theory. J. Appl. Phys. 17, № 2, 1946.

Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. И. М. Губкина

Поступила в редакцию 31 января 1972 г.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ГЕОЛОГИЯ И ГЕОФИЗИКА

№ 2 1973

КРАТКИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 550.838+550.831

Г. Ф. КУЗНЕЦОВ

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ МАГНИТНЫХ И ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ В УЗЛАХ КВАДРАТНОЙ СЕТКИ ПО КАРТАМ ИЗОЛИНИЙ

В связи с применением ЭВМ в практике интерпретации геофизических материалов непрерывно повышается точность вычислений, используется более сложный математический аппарат, проводится все более многосторонний математический анализ геофизического материала. Это существенно повышает качество интерпретации и одновременно повышает требования к качеству подготовки исходного материала для последующей обработки его на ЭВМ. Это относится, в частности, к кодировке данных с карт изолиний. При задании исходной информации с карт изолиний необходимо выполнять интерполяцию поля в точках между изолиниями, операцию довольно трудоемкую и неизбежно приводящую к определенным погрешностям. Сглаживание этих погрешностей приводит к искажению локальных аномалий и нередко к искажению самих изолиний. Существующие же автоматические кодирующие устройства пока не выполняют такой интерполяции.

Уже при составлении карт изолиний вносятся некоторые погрешности, однако обычно эти карты рассматриваются как отчетный документ, для исправления которого не имеется достаточных оснований.

Карты изолиний при обработке и интерпретации геофизического материала занимают важное место. Они являются основным результативным материалом полевых гравиметрических и магнитометрических работ. Кроме того, имеется большой материал по работам прошлых лет, который не подвергался в свое время обработке на ЭВМ. Все сказанное выше определяет необходимость разработки такого способа получения значений поля в узлах квадратной сетки, который максимально использовал бы возможности ЭВМ, а объем входных данных при этом был бы наименьшим.

Такая постановка задачи предполагает использование некоторого метода интерполяции, удовлетворяющего следующему требованию: в узлах интерполяции не должна появляться высокочастотная составляющая поля, т. е. в них не должно быть локальных экстремумов.

Для того чтобы сократить объем входных данных в ЭВМ, предусматривается следующая кодировка. Каждая изолиния представляется ломаной линией. В тех случаях, когда изолинии по конфигурации близки друг к другу, допускается их разрядка (через одну, две и т. д.). При такой замене можно кодировать только координаты вершин ломаных линий, масштабный коэффициент шага сетки и размеры участка по осям x и y. Эта кодировка существенно исключает субъективность исполнителя, если предельная величина отклонения изолинии от ломаной задается заранее.