АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ФИЗИКА ЗЕМЛИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

6

МОСКВА · 1973

ФИЗИКА ЗЕМЛИ

№ 6 1973

УДК 550.837.6

М. С. ЖДАНОВ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Излагаются методы аналитического продолжения двумерных переменных электромагнитных полей с произвольной линии L в верхнюю и нижнюю полуплоскости. Приводятся расчетные формулы для случаев E- и H-поляризации поля.

В работе [1] была построена общая теория аналитического продолжения переменных электромагнитных полей с поверхности наблюдения S в верхнее и нижнее полупространства. При этом предполагалось, что исходное поле задано всюду на поверхности S и зависит от трех пространственных координат (рассматривалась трехмерная задача).

Однако на практике электромагнитные измерения осуществляются чаще всего вдоль некоторых профилей, проводимых обычно в направлении наибольшего изменения геоэлектрических свойств разреза. Если предположить, что параметры среды вдоль оси, перпендикулярной плоскости профиля, не изменяются, то можно перейти от рассмотрения трехмерных полей к плоским (зависящим от двух пространственных координат) полям. В этом случае все соотношения теории аналитического продолжения существенно упрощаются.

При анализе плоских гравитационных или статических электромагнитных полей широко используются методы теории функций комплексного переменного, так как эти поля описываются комплексно-аналитическими функциями. В рассматриваемом случае (вихревые поля) указанный аппарат, к сожалению, не может быть использован. Возникает необходимость разработки адекватного математического аппарата для исследования нестационарных электромагнитных полей. Нам представляется наиболее удобным использовать для этих целей ту же технику, которая была развита в работах [1, 2] для описания трехмерных электромагнитных и гравитационных полей. По существу, вся теория, развиваемая ниже, является переложением на двумерный случай теории аналитического продолжения трехмерных электромагнитных полей [1], поэтому в данной работе мы не будем подробно излагать все выкладки и доказательства, ограничиваясь в соответствующих местах ссылками на работу [1].

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ; ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть задана среда, состоящая из двух полупространств, разделенных поверхностью S, с постоянными в каждом полупространстве параметрами:

$$\varepsilon^{(\nu)} = \varepsilon_0^{(\nu)} + \frac{i\sigma^{(\nu)}}{\omega}; \quad \mu^{(\nu)}; \quad \nu = 1, 2, \tag{1}$$

где $\varepsilon_0^{(\nu)}$, $\mu^{(\nu)}$ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, $\sigma^{(\nu)}$ — электрическая проводимость, ω — круговая частота.

Обозначим верхнее полупространство через Π^+, нижнее — через Π^-.

Граница S есть кусочно-гладкая цилиндрическая поверхность. Зададим систему координат (x_1, x_2, x_3) таким образом, чтобы ось X_3 была бы направлена вверх (в сторону Π^+), а ось X_2 параллельна образующей поверхности S. В этой системе координат поверхность S пусть задается следующими уравнениями:

$$S: \left\{ x_l = x_l(s,t);\ l = 1, 3; \quad \begin{matrix} -\infty < s < \infty; \\ -\infty < t < \infty; \end{matrix} \quad -\infty < x_2 < \infty \right\},$$

причем $0 \geqslant x_3(s, t) \geqslant -h_0$; $h_0 \geqslant 0$.

Гармоническое во времени электромагнитное поле (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$) возбуждается в данной среде двумя произвольно заданными системами источников, расположенных в областях Q^+ и Q^-, где $Q^+ \subset \Pi^+$; $Q^- \subset \Pi^-$. Причем источники Q^+ и Q^- таковы, что векторы напряженности электрического и магнитного полей зависят только от двух пространственных координат: x_1 и x_3, т. е. источники Q^+ и Q^- однородны по оси X_2.

Будем рассматривать линейно-поляризованные поля, при этом возможны два случая [3]:

H-поляризация. Так называют случай, когда магнитный вектор поля поляризован по оси однородности среды; электромагнитное поле состоит из трех компонент: E_1, H_2, E_3.

E-поляризация. Так называют случай, когда по оси однородности среды поляризован вектор напряженности электрического поля. Полное поле в среде состоит из трех компонент: H_1, E_2, H_3.

Всюду ниже мы будем раздельно рассматривать случаи H- и E-поляризации.

Обозначим линию пересечения поверхности S с координатной плоскостью X_1OX_3 через L, часть плоскости X_1OX_3, принадлежащую Π^+, обозначим через π^+, а оставшуюся часть — через π^-. Тогда задачу аналитического продолжения плоского электромагнитного поля можно сформулировать следующим образом: по известным значениям компонент E_1, H_2, E_3 (H_1, E_2, H_3) линейно-поляризованной воды на кривой L необходимо найти значения компонент E_1, E_3 (H_1, H_3) всюду в пространстве, за исключением областей Q^+ и Q^-.

Выпишем основные соотношения, которым удовлетворяют векторы **E** и **H**:

H-поляризация:

$$\begin{gathered} E^{(\nu)}_{[\hat{m},\alpha]} = i\omega\mu^{(\nu)}(2-\hat{m})H^{(\nu)}_{2}, \\ (2-\hat{m})H^{(\nu)}_{2,\hat{m}} = -i\omega\varepsilon^{(\nu)}E^{(\nu)}_{\alpha}, \\ E^{(\nu)}_{1,1} + E^{(\nu)}_{3,3} = 0, \\ \alpha = 1, 3; \quad \hat{m} = 1, 3; \quad \hat{m} \neq \alpha, \end{gathered} \tag{2}$$

где индекс $\nu = 1$ для π^+; $\nu = 2$ для π^-.

E-поляризация:

$$\begin{gathered} H^{(\nu)}_{[\hat{m},\alpha]} = -i\omega\varepsilon^{(\nu)}(2-\hat{m})E^{(\nu)}_{2}, \\ (2-\hat{m})E^{(\nu)}_{2,\hat{m}} = i\omega\mu^{(\nu)}H^{(\nu)}_{\alpha}, \\ H^{(\nu)}_{1,1} + H^{(\nu)}_{3,3} = 0, \\ \alpha = 1,3; \quad \hat{m} = 1,3; \quad \hat{m} \neq \alpha, \end{gathered} \tag{3*}$$

где индекс

$$\nu = 1 \quad \text{для} \quad \pi^+; \quad \nu = 2 \quad \text{для} \quad \pi^-.$$

---

* В уравнениях (2), (3) и всюду ниже используются обозначения, принятые в работе [1].

Уравнения (2) и (3) справедливы всюду в пространстве, кроме областей Q^+ и Q^- и поверхности S (кривой L).

Аналогично тому, как это было сделано в работе [1], представим **E** и **H** в виде суммы нормального $\mathbf{E}^+$, $\mathbf{H}^+$ и аномального $\mathbf{E}^-$ и $\mathbf{H}^-$ полей, тогда аномальные поля удовлетворяют уравнениям (2) и (3) всюду в пространстве (на плоскости X_1OX_3), за исключением области Q^-.

§ 2. ДВУМЕРНЫЙ МАТРИЧНЫЙ АНАЛОГ ФОРМУЛ СТРЭТТОНА — ЧУ

Рассмотрим некоторую область V пространства, ограниченную кусочно-гладкой цилиндрической поверхностью Г. Пусть внутри этой области среда однородна и изотропна и характеризуется постоянными параметрами $\varepsilon = \varepsilon_0 + i\sigma / \omega$; μ. Систему координат расположим таким образом, чтобы ось X_2 была параллельна образующей поверхности Г. Контур, получающийся в результате пересечения Г с плоскостью X_1OX_3, обозначим K. Тогда внутри области γ плоскости X_1OX_3, ограниченной контуром K, компоненты H_1, E_2, H_3 (E_1, H_2, E_3) линейно-поляризованной электромагнитной волны, вызванной внешними по отношению к V источниками, удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} H_{[\hat m,\alpha]} &= -i\omega\varepsilon(2-\hat m)E_2, \\ (2-\hat m)E_{2,\hat m} &= +i\omega\mu H_\alpha, \\ H_{1,1} + H_{3,3} &= 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

где α, $\hat m = 1,3$; $\hat m \neq \alpha$.

Уравнения (4) даны для случая E-поляризации. При H-поляризации надо всюду в (4) заменить E_α на H_α; H_α на E_α; μ на $(-\varepsilon)$; ε на $(-\mu)$. Отметим, что ниже изложение в основном будет вестись в терминах E-поляризации. Соответствующие формулы для H-поляризации могут быть получены из формул для E-поляризации с помощью указанного выше перехода.

Введем в рассмотрение четырехиндексный объект:

$$\{\tilde\Delta^{\beta}_{\alpha}|^{ml}, \quad \alpha, \beta, m, l = 1, 3\},$$

где компоненты $\tilde\Delta^{\beta}_{\alpha}|^{ml}$ определяются из следующей матрицы:

		$\alpha = 1$, $m = 1$	$\alpha = 1$, $m = 3$	$\alpha = 3$, $m = 1$	$\alpha = 3$, $m = 3$
$\beta = 1$	$l = 1$	1	0	0	1
	$l = 3$	0	1	-1	0
$\beta = 3$	$l = 1$	0	-1	1	0
	$l = 3$	1	0	0	1

Непосредственной проверкой можно убедиться, что объект $\tilde\Delta^{\beta}_{\alpha}|^{ml}$ удовлетворяет свойствам $1 \div 4$ § 2 работы [1] при условии α, β, m, $l = 1, 3$.

Лемма 2. В любой внутренней точке области γ справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\tilde\Delta^{\beta}_{\alpha}|^{ml} H_\beta \varphi_{,m} - i\omega\varepsilon(2-\hat m)\delta^l_{\hat m}\varphi E_2\right] \equiv H_\alpha(\Delta\varphi + k^2\varphi), \qquad (5)^*$$

где $\hat m \neq \alpha$; α, β, m, $l = 1,3$;

$\varphi = \varphi(x_1, x_3)$ — произвольная дважды непрерывно-дифференцируемая функция в γ;

k — волновое число; $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$;

$$\delta^l_{\hat m} = \begin{cases} 1; & l = \hat m, \\ 0; & l \neq \hat m. \end{cases}$$

* В выражении (5) и всюду ниже подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 работы [1].

Выберем в качестве функции φ функцию Грина однородного пространства (двухмерного):

$$\varphi = g(x, y) = \frac{\pi i}{2} \mathfrak{H}_0^{(1)} (k|x-y|),$$

где $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_3-y_3)^2}$; $\mathfrak{H}_0^{(1)}$ — функция Ханкеля нулевого порядка 1-го рода.

Тогда

$$\Delta g + k^2 g = -2\pi\delta(x-y), \tag{6}$$

где $\delta(x-y)$ — дельта-функция Дирака.

Интегрируя тождество (5) по всей области γ и применяя к левой части тождества формулу Грина, получим

$$\int_K [\widetilde{\Delta}_\alpha^\beta]^{ml} H_\beta \varphi_{,m} - i\omega\varepsilon(2-\hat{m})\,\delta_{\hat{m}}^l \varphi E_2]\, \nu_l(y)\, dl_y =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{если } \Delta\varphi + k^2\varphi = 0, \\ -2\pi H_\alpha(x), & \text{если } \varphi = g(x, y); \quad x \in \gamma, \end{cases} \tag{7}$$

где K — граница области γ;
$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_3)$ — единичный вектор внешней нормали к контуру K в точке $y \in K$.

Соотношение (7) является двумерным матричным аналогом известных формул Стрэттона — Чу.

§ 3. ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Первоначально выпишем интегральные формулы для аналитического продолжения электромагнитных полей в предположении, что параметры сред Π^+ и Π^- совпадают, т. е.

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon, \qquad \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu.$$

С помощью рассуждений, аналогичных описанным в § 3 работы [1], на базе формулы (7) можно получить следующие соотношения для аналитического продолжения аномальных компонент поля в верхнюю полуплоскость π^+.

E-поляризация

$$H_\alpha^-(x_0) = \frac{-1}{2\pi} \int_L [\widetilde{\Delta}_\alpha^\beta]^{ml} g_{,m} H_\beta^- - i\omega\varepsilon(2-\hat{m})\,\delta_{\hat{m}}^l g E_2^-]\, \nu_l dl_y; \tag{8}$$

H-поляризация

$$E_\alpha^-(x_0) = \frac{-1}{2\pi} \int_L [\widetilde{\Delta}_\alpha^\beta]^{ml} g_{,m} E_\beta^- + i\omega\mu(2-\hat{m})\,\delta_{\hat{m}}^l g H_2^-]\, \nu_l dl_y, \tag{9}$$

где точка $x_0 \in \pi^+$.

Интегральные представления (8) и (9) справедливы при выполнении условия излучения.

Для решения задачи об аналитическом продолжении плоских электромагнитных полей в нижнюю полуплоскость можно воспользоваться следующим разложением:

$$\frac{\pi i}{2} \mathfrak{H}_0^{(1)} (k|x-y|) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(w^*, x-y)}}{\sqrt{u^2-k^2}}\, du, \tag{10}$$

где $w^* = (w_1, \pm w_3) = (u;\ \pm i\sqrt{u^2 - k^2})$, $\quad (w^*, x - y) = u(x_1 - y_1) \pm i\sqrt{(u^2 - k^2}(x_3 - y_3)$.

В разложении (10) знак «+» берется при условии: $x_3 > y_3$, а знак «−» — при условии $x_3 < y_3$.

Пусть $\{x_3 = -p\}$ есть горизонтальная прямая, проходящая через ближайшую к профилю наблюдения L точку области Q^- $(p > 0)$. Тогда, подставляя разложение (10) в (8) и производя соответствующие преобразования (см. [1]), получаем

$$H_\alpha^-(x) = \frac{i}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(w,x)}}{\sqrt{u^2 - k^2}} \left\{ \int\limits_L [\widetilde{\Delta}_\alpha^\beta]^{ml} w_m H_\beta^- + \right.$$

$$\left. + \omega\varepsilon(2 - \hat{m})\, \delta^l_{\hat{m}} E_2^-]\, e^{-i(w,y)} \nu_l(y)\, dl_y \right\} du, \tag{12}$$

где $x = (x_1, x_3)$, $x_3 > -p$, $w = (w_1, w_3)$. Аналогичное соотношение можно получить в случае H-поляризации.

Соотношение (12) позволяет решать задачу аналитического продолжения аномального электромагнитного поля в однородной среде в нижнюю полуплоскость до горизонтальной прямой, проходящей через ближайшую к линии L точку неоднородности Q^-.

В том случае, если среда неоднородна — состоит из двух полупространств Π^+ и Π^- с различными диэлектрическими свойствами (см. § 1),— соответствующие формулы для аналитического продолжения поля в нижнюю полуплоскость π^- принимают вид

$$H_\alpha^{(2)}(x) = \frac{i}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(w^{(2)},x)}}{\sqrt{u^2 - k_2^2}} \left\{ \int\limits_L [\bar{\Delta}_\alpha^\beta]^{ml} w_m^{(2)} H_\beta^{(2)} + \right.$$

$$\left. + \omega\varepsilon^{(2)}(2 - \hat{m}) E_2^{(2)}] e^{-i(w^{(2)},y)} \nu_l(y)\, dl_y \right\} du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_L [\bar{\Delta}_\alpha^\beta]^{ml} g_{,m}^{(2)} H_\beta^{(2)} - i\omega\varepsilon^{(2)} g^{(2)} (2 - \hat{m}) E_2^{(2)}]\, \nu_l(y)\, dl_y. \tag{13}$$

Формула (13) дана для случая E-поляризации.

Аналогично тому, как это было в трехмерном случае [1], соотношение (13) может быть применено не только для аналитического продолжения аномальных компонент электромагнитного поля $\mathbf{E}^-$ и $\mathbf{H}^-$, но также и для продолжения полных (суммарных) векторов напряженности магнитного и электрического полей.

§ 4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ НАПРЯЖЕННОСТИ ПЛОСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ, ЗАДАННЫХ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ

Большое прикладное значение имеет тот частный случай, когда линия, на которой заданы исходные значения векторов напряженности электромагнитного поля, является горизонтальной прямой

$$L : \{x_3 = 0\}.$$

Рассмотрим Фурье-преобразования (спектры) векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ вдоль прямой $\{x_3 = c\}$:

$$h_\alpha(u)_c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_\alpha(y_1, c)\, e^{-iuy_1}\, dy_1,$$

$$e_\alpha(u)_c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha(y_1, c)\, e^{-iuy_1}\, dy_1. \tag{14}$$

В целях сокращения записи будем писать

$$h_\alpha(u)_0 = h_\alpha, \quad e_\alpha(u)_0 = e_\alpha.$$

Введем также обозначения:

$$h_{\alpha,\beta}(u)_c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\alpha,\beta}(y_1, c)\, e^{-iuy_1}\, dy_1, \quad e_{\alpha,\beta}(u)_c = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,\beta}(y_1, c)\, e^{-iuy_1}\, dy_1. \quad (15)$$

Спектры h_α, $h_{\alpha,\beta}$, e_α, $e_{\alpha,\beta}$ полных и аномальных электромагнитных полей удовлетворяют следующим соотношениям:

$$h_{\alpha,1}(u)_c = iw_1 h_\alpha(u)_c = iuh_\alpha(u)_c,$$

$$e_{\alpha,1}(u)_c = iw_1 e_\alpha(u)_c = iue_\alpha(u)_c,$$

$$h_{\alpha,3}(u)_c = \left[\frac{\partial}{\partial x_3} h_\alpha(u)_{x_3}\right]_{x_3=c}, \quad (16)$$

$$e_{\alpha,3}(u)_c = \left[\frac{\partial}{\partial x_3} e_\alpha(u)_{x_3}\right]_{x_3=c}.$$

Спектры аномальных полей $\mathbf{H}^-$ и $\mathbf{E}^-$, кроме того, обладают следующими свойствами (в верхней полуплоскости):

$$\bar{h}_{\alpha,3}(u)_c = iw_3^{(1)}\, \bar{h}_\alpha(u)_c, \quad \bar{e}_{\alpha,3}(u)_c = iw_3^{(1)}\, \bar{e}_\alpha(u)_c, \quad (17)$$

где $w_3^{(1)} = i\sqrt{u^2 - k_1^2}$; $c \geqslant 0$.

Опираясь на свойства (16) и (17) спектральных преобразований, можно существенно упростить формулу (13) для случая, когда L есть горизонтальная прямая. Не останавливаясь на технике преобразований, выпишем таблицу основных формул для аналитического продолжения двумерных электромагнитных полей с прямой L в нижнюю полуплоскость.

H-поляризация

1. Полное поле

$$E_1^{(2)}(x_1, -\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux_1)\left\{e_1^{(2)} \operatorname{ch}\theta\zeta + \left[\frac{u}{w_3^{(2)}} e_3^{(2)} + \frac{\omega\mu^{(2)}}{w_3^{(2)}} h_2^{(2)}\right] \operatorname{sh}\theta\zeta\right\} du, \quad (18)$$

$$E_3^{(2)}(x_1, -\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux_1)\left\{e_3^{(2)} \operatorname{ch}\theta\zeta - \frac{u}{w_3^{(2)}} e_1^{(2)} \operatorname{sh}\theta\zeta\right\} du. \quad (19)$$

2. Аномальное поле *

$$E_1^{(2)}(x_1, -\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux_1)\left\{e_1^{(2)}\left[\operatorname{ch}\theta\zeta + \frac{w_3^{(1)}\mu^{(2)}}{w_3^{(2)}\mu^{(1)}} \operatorname{sh}\theta\zeta\right] + e_3^{(2)} \frac{u}{w_3^{(2)}}\left(1 - \frac{\varepsilon^{(2)}\mu^{(2)}}{\varepsilon^{(1)}\mu^{(1)}}\right) \operatorname{sh}\theta\zeta\right\} du, \quad (20)$$

---

* В формулах (20), (21), (24), (25) индекс «—» у векторов $\mathbf{H}^-$ и $\mathbf{E}^-$, описывающих аномальные поля, для упрощения записи опущен.

$$E_3^{(2)}(x_1, -\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux_1)\, e_3^{(2)} \left[\operatorname{ch}\theta\zeta + \frac{w_3^{(1)}\varepsilon^{(2)}}{w_3^{(2)}\varepsilon^{(1)}} \operatorname{sh}\theta\zeta\right] du. \quad (21)$$

E-поляризация

1. Полное поле:

$$H_1^{(2)}(x_1, -\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux_1) \left\{h_1^{(2)} \operatorname{ch}\theta\zeta + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{u}{w_3^{(2)}} h_3^{(2)} - \frac{\omega\varepsilon^{(2)}}{w_3^{(2)}} e_2^{(2)}\right] \operatorname{sh}\theta\zeta\right\} du, \quad (22)$$

$$H_3^{(2)}(x_1, -\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux_1) \left\{h_3^{(2)} \operatorname{ch}\theta\zeta - \frac{u}{w_3^{(2)}} h_1^{(2)} \operatorname{sh}\theta\zeta\right\} du. \quad (23)$$

2. Аномальное поле:

$$H_1^{(2)}(x_1, -\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux_1) \left\{h_1^{(2)} \left[\operatorname{ch}\theta\zeta + \frac{w_3^{(1)}\varepsilon^{(2)}}{w_3^{(2)}\varepsilon^{(1)}} \operatorname{sh}\theta\zeta\right] + \right.$$

$$\left. + h_3^{(2)} \frac{u}{w_3^{(2)}} \left(1 - \frac{\varepsilon^{(2)}\mu^{(2)}}{\varepsilon^{(1)}\mu^{(1)}}\right) \operatorname{sh}\theta\zeta\right\} du, \quad (24)$$

$$H_3^{(2)}(x_1, -\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux_1)\, h_3^{(2)} \left[\operatorname{ch}\theta\zeta + \frac{w_3^{(1)}\mu^{(2)}}{w_3^{(2)}\mu^{(1)}} \operatorname{sh}\theta\zeta\right] du. \quad (25)$$

В формулах (18) — (25) параметр $\zeta > 0$; $\theta = \sqrt{u^2 - k_2^2}$.

В случае, когда среда однородна,

$$\mu^{(1)} = \mu^{(2)}, \quad \varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)}, \quad \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)},$$

соотношения (24), (25) существенно упрощаются:

$$H_\alpha^-(x_1, -\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux_1 + \sqrt{u^2 - k^2}\,\zeta)\, h_\alpha^-\, du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux_1 + \sqrt{u^2 - k^2}\,\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} H_\alpha^-(y_1, 0) \exp(-iuy_1)\, dy_1\, du. \quad (26)$$

Аналогичное соотношение может быть получено для компонент E_α^- при *H*-поляризации.

При условии, что $\zeta = -h < 0$, выражение (26) приводится к виду

$$H_\alpha^-(x_1, h) = \frac{h}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{H}_1^{(1)}(kr) \frac{k}{r} H_\alpha^-(y_1, 0)\, dy_1, \quad (27)$$

где $\mathfrak{H}_1^{(1)}$ — функция Ханкеля 1-го порядка 1-го рода,

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + h^2}.$$

Формула (27) служит для аналитического продолжения двумерного аномального электромагнитного поля в верхнее полупространство (как для однородной, так и для двухслойной среды). При условии $\omega = 0$ соотношения (26) и (27) переходят в обычные формулы аналитического продолжения плоских потенциальных полей в верхнее и нижнее полупространства.

Таким образом, развитый выше аппарат позволяет восстанавливать значения векторов напряженности электромагнитного поля, заданных на поверхности S (кривой L), во всем пространстве, кроме областей, занятых источниками поля. При этом необходимо знать параметры: μ — магнитную проницаемость, ε_0 — диэлектрическую проницаемость, σ — проводимость среды, в пределах которой осуществляется продолжение поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрим кратко возможности использования развитых в настоящей статье и работе [1] методов аналитического продолжения переменных электромагнитных полей при интерпретации электроразведочных данных.

Прежде всего, изложенная выше теория показывает, что интерпретация потенциальных (гравитационных и стационарных электромагнитных) и вихревых (переменных электромагнитных) полей может быть основана на едином подходе, заключающемся в восстановлении пространственной картины распределения измеренных полей. Анализ этого распределения позволяет определить местоположение и характер источников исследуемого поля. При этом методика интерпретации аналитически продолженных значений переменных электромагнитных полей, с одной стороны, должна во многом опираться на те приемы и методы, которые уже применяются для анализа потенциальных полей, а с другой стороны, может использовать ряд важных и весьма полезных особенностей, свойственных только переменным электромагнитным полям.

В качестве иллюстрации некоторых таких особенностей рассмотрим два следующих предельных случая.

1. Построим токовые линии для электрического поля в однородной проводящей среде, содержащей непроводящее включение (примером такой модели может служить разрез, состоящий из проводящего осадочного чехла и непроводящего основания — фундамента). Тогда в силу эллиптической поляризации векторов поля (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$) токовые линии в различные моменты времени в любой точке проводящей среды будут направлены по-разному, за исключением токовых линий, совпадающих с контуром непроводящего включения (так как ток на границе раздела проводник — изолятор течет параллельно поверхности изолятора). Геометрически это выражается в том, что токовые линии для действительных и мнимых частей векторов **E**, описывающих электрическое поле, всюду в проводящей среде взаимно пересекаются и совпадают только на контуре непроводящего тела.

2. Аналогичная картина имеет место в системе токовых линий, проведенных для магнитного поля в однородной проводящей (или непроводящей) среде, содержащей включения бесконечной проводимости (примером такой модели может служить разрез осадочных пород, содержащих рудные тела). В этом случае всюду в проводящей среде взаимно пересекаются токовые линии, построенные для действительных и мнимых частей векторов **H**, описывающих магнитное поле, за исключением тех токовых линий, которые совпадают с контуром проводящего тела (так как вектор магнитной индукции, направленный по нормали к поверхности проводника бесконечной проводимости, равен нулю).

На базе рассмотренных примеров можно сделать вывод о том, что интерпретация аналитически продолженных значений переменных электромагнитных полей должна состоять из следующих двух этапов: а) построение токовых линий для действительных и мнимых частей векторов **H** и **E** («действительных» и «мнимых» токовых линий), б) поиск тех кривых (или поверхностей — в трехмерном случае), на которых «действительные» и «мнимые» токовые линии совпадают.

Из описанных выше примеров видно также, что интерпретация переменных электромагнитных полей на основе методов аналитического продолжения, несмотря на внешнюю сложность применяемого аппарата, может оказаться на практике даже более эффективной, чем интерпретация аналогичными методами потенциальных полей. Действительно, решение обратной задачи с помощью аналитического продолжения потенциальных полей чаще всего основывается на поиске особых точек этих полей, приуроченных к различным геометрическим особенностям строения аномалиеобразующих тел. При этом, восстановить однозначно форму всей поверхности искомых тел (на тех участках, где их форма описывается гладкими кривыми или поверхностями) принципиально невозможно. При анализе же карт продолженных значений переменных электромагнитных полей появляется возможность, как это следует из приведенных выше примеров, определить с помощью построения системы токовых линий всю поверхность искомых объектов.

Отметим, однако, что для полного воплощения на практике сформулированных выше принципов необходима разработка методов продолжения переменных электромагнитных полей не только в горизонтальную полосу, как это было сделано выше, но и в произвольные области, охватывающие со всех сторон поверхность искомых объектов.

В заключение выражаю глубокую признательность М. Н. Бердичевскому, способствовавшему проведению настоящего исследования, за ценные обсуждения и советы.

**Московский институт
нефтехимической и газовой
промышленности им. И. М. Губкина**

Поступила
4 V 1971

Литература

1. Жданов М. С. Об аналитическом продолжении трехмерных электромагнитных полей. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 4, 1973.
2. Жданов М. С. Развитие теории аналитического продолжения потенциальных полей в криволинейных трехмерных областях. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 2, 1973.
3. Бердичевский М. Н. Электрическая разведка методом магнитотеллурического профилирования. «Недра», М., 1968.