АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ФИЗИКА ЗЕМЛИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

8

МОСКВА · 1973

ФИЗИКА ЗЕМЛИ

№ 8 1973

УДК 550.837.6

М. С. ЖДАНОВ

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЗЕМЛИ

Излагаются методы выделения из переменного электромагнитного поля, наблюденного на произвольной поверхности (в частности, на поверхности Земли), слагаемых, источники которых расположены по разные стороны от этой поверхности, а также слагаемых, обязанных своим возникновением присутствию самой поверхности раздела. На базе этих методов конструируются формулы для разделения геофизического электромагнитного поля на нормальную и аномальную части и выделения первичных нормальных и аномальных полей.

Предлагаемая теория представляет собой развитие классических методов разделения постоянного электромагнитного поля на части внутреннего и внешнего происхождения.

Важным этапом интерпретации данных магнитовариационного и магнитотеллурического профилирования и зондирования, индукционных методов разведки и ряда других геофизических методов, использующих переменные электромагнитные поля, является разделение наблюденного поля на нормальную и аномальную части. Аналогичная задача возникает при изучении структуры естественного электромагнитного поля Земли. В существующих способах разделения естественных электромагнитных полей используется различие пространственных спектров нормального и аномального полей (т. е. принцип частотной фильтрации). В методах электроразведки, использующих искусственные поля, вычисление аномалий осуществляется путем расчета поля заданного источника на поверхности однородной земли (нормального поля) и его последующего вычитания из наблюденного (суммарного) поля.

В статье предлагается новый способ разделения, основанный на анализе пространственного распределения нормального и аномального полей и одинаково применимый в методах разведки, использующих как естественные, так и искусственные переменные электромагнитные поля.

Отметим, что для случая потенциальных электрических и магнитных (и гравитационных) полей фундаментальные исследования по теории разделения полей были проведены болгарским математиком И. П. Недялковым в 1965 г. [1]. В настоящей работе рассматриваются более общие методы разделения электромагнитных полей, частным следствием которых является метод И. П. Недялкова.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВИДЕ СУММЫ НОРМАЛЬНОГО И АНОМАЛЬНОГО ПОЛЕЙ

Рассмотрим среду, состоящую из двух полупространств Π^+ (верхнее) и Π^- (нижнее), разделенных кусочно-гладкой поверхностью S, описываемой в некоторой декартовой системе координат следующими уравнениями:

$$S:\left\{\begin{array}{l} x_l = x_l(s,t)_{l=1,2,3} \; -\infty < s, t < +\infty \\ 0 \geqslant x_3(s,t) \geqslant -h_0; \qquad h_0 \geqslant 0 \end{array}\right\}$$

(ось X_3 направлена в сторону Π^+).

Полупространства Π^+ и Π^- характеризуются следующими постоянными параметрами:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(\nu)} = \varepsilon_0^{(\nu)} + \frac{t\sigma^{(\nu)}}{\omega}, \qquad \mu^{(\nu)}, \qquad \nu = 1, 2,$$

где $\varepsilon_0^{(\nu)}$, $\mu^{(\nu)}$ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, $\sigma^{(\nu)}$ — электрическая проводимость, $\omega = \mathrm{const}$; круговая частота — индекс $\nu = 1$ относится к Π^+, а $\nu = 2$ — к Π^-.

В нижнем полупространстве имеется область неоднородностей Q^-, характеризующаяся иными, чем во всем Π^-, параметрами:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \varepsilon^{(2)} + \Delta\varepsilon(x), \\ \mu(x) &= \mu^{(2)} + \Delta\mu(x), \end{aligned}\right. \qquad x \in Q^-,$$

где x — координата точки наблюдения. Гармоническое во времени электромагнитное поле (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$) возбуждается в среде произвольной системой источников, расположенных в области Q^+ в верхнем полупространстве.

Напишем основные уравнения для векторов напряженности электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей.

В любой точке пространства, за исключением точек, принадлежащих областям Q^+ и Q^-, справедливы уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\boldsymbol{\varepsilon}^{(\nu)}\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu^{(\nu)}\mathbf{H}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\nu = 1$ при $x \in \Pi^+ \setminus Q^+$,
$\nu = 2$ при $x \in \Pi^- \setminus Q^-$.

В области Q^+:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon^{(1)}\mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{ст}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu^{(1)}\mathbf{H}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ — плотность сторонних токов.

В области Q^-:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon^{(2)}\mathbf{E} - i\omega\Delta\varepsilon\mathbf{E} = -i\omega\varepsilon^{(2)}\mathbf{E} + \mathbf{j}^*, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu^{(2)}\mathbf{H} + i\omega\Delta\mu\mathbf{H} = i\omega\mu^{(2)}\mathbf{H} - \mathbf{j}^{**}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathbf{j}^*$; $\mathbf{j}^{**}$ — плотности электрических и фиктивных магнитных токов, текущих в области Q^- и удовлетворяющих уравнениям непрерывности:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{j}^* &= i\omega\varepsilon^{(2)} \operatorname{div} \mathbf{E} = i\omega q^*, \\ \operatorname{div} \mathbf{j}^{**} &= i\omega\mu^{(2)} \operatorname{div} \mathbf{H} = i\omega q^{**}, \end{aligned} \tag{4}$$

(q^*, q^{**} — плотности электрических и магнитных зарядов).

Таким образом, соотношение (3), аналогично тому, как это было показано в работе [2], позволяет считать нижнее полупространство Π^- повсюду однородным, а присутствие области неоднородности Q^- учесть с помощью токов и зарядов $\mathbf{j}^*$, $\mathbf{j}^{**}$; $\mathbf{q}^*$, $\mathbf{q}^{**}$.

Представим электрическое и магнитное поля в виде суммы двух полей: нормального и аномального:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_a, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_n + \mathbf{H}_a. \tag{5}$$

Нормальная часть описывает поле, возбуждаемое сторонними токами при отсутствии неоднородности ($\Delta\varepsilon \equiv 0$; $\Delta\mu \equiv 0$), аномальная — поле, возникающее благодаря неоднородности. Нормальные и аномальные поля удовлетворяют уравнениям:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_n = -i\omega\varepsilon^{(\nu)}\mathbf{E}_n, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E}_n = i\omega\mu^{(\nu)}\mathbf{H}_n, \tag{6а}$$

где $\nu = 1$ при $x \in \Pi^+ \setminus Q^+$,
$\nu = 2$ при $x \in \Pi^-$,

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_n = -i\omega\varepsilon^{(1)}\mathbf{E}_n + \mathbf{j}_{\text{ст}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_n = i\omega\mu^{(1)}\mathbf{H}_n; \end{cases} \tag{6б}$$

где $x \in Q^+$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_a = -i\omega\varepsilon^{(\nu)}\mathbf{E}_a, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_a = i\omega\mu^{(\nu)}\mathbf{H}_a, \end{cases} \tag{7а}$$

где $\nu = 1$ при $x \in \Pi^+$,
$\nu = 2$ при $x \in \Pi^- \setminus Q^-$,

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_a = -i\omega\varepsilon^{(2)}\mathbf{E}_a + \mathbf{j}^*, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_a = i\omega\mu^{(2)}\mathbf{H}_a - \mathbf{j}^{**}, \end{cases} \tag{7б}$$

где $x \in Q^-$.

На границе раздела сред S непрерывны тангенциальные компоненты нормальных и аномальных полей. На бесконечности выполняется условие излучения.

В соответствии с уравнениями (7а, б) аномальное поле можно рассматривать как поле распределенных в области Q^- зарядов и токов $\mathbf{j}^*$, $\mathbf{j}^{**}$; q^*, q^{**}, распространяющееся в двухслойной среде.

Нормальное поле в верхнем полупространстве (вплоть до границы S) $\overline{\Pi}^+$ представимо в виде суммы двух полей — первичного $\left(\underset{(1)}{\mathbf{H}_n}, \underset{(1)}{\mathbf{E}_n}\right)$ и вторичного $\left(\underset{(2)}{\mathbf{H}_n}, \underset{(2)}{\mathbf{E}_n}\right)$;

$$\mathbf{H}_n = \underset{(1)}{\mathbf{H}_n} + \underset{(2)}{\mathbf{H}_n}, \quad \mathbf{E}_n = \underset{(1)}{\mathbf{E}_n} + \underset{(2)}{\mathbf{E}_n}, \tag{8}$$

где первичное нормальное поле характеризует поле сторонних токов в однородном пространстве с параметрами $\varepsilon^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, а вторичное — поле токов, индуцированных в полупространстве Π^-. Аналогично, аномальное поле в нижнем полупространстве (вплоть до границы S) Π^- представимо в виде суммы «первичного» $\left(\underset{(1)}{\mathbf{H}_a}, \underset{(1)}{\mathbf{E}_a}\right)$ и «вторичного» $\left(\underset{(2)}{\mathbf{H}_a}, \underset{(2)}{\mathbf{E}_a}\right)$ полей:

$$\mathbf{H}_a = \underset{(1)}{\mathbf{H}_a} + \underset{(2)}{\mathbf{H}_a}, \quad \mathbf{E}_a = \underset{(1)}{\mathbf{E}_a} + \underset{(2)}{\mathbf{E}_a}, \tag{9}$$

где первичное аномальное поле характеризует поле зарядов и токов, индуцированных в области Q^- и распространяющихся в однородном пространстве с параметрами $\varepsilon^{(2)}$, $\mu^{(2)}$, а вторичное – аномальное поле, отраженное от границы раздела сред S.

Первичные нормальные и аномальные поля удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \underset{(1)}{H_n} = -\,i\omega\varepsilon^{(1)}\underset{(1)}{E_n}, \\ \operatorname{rot} \underset{(1)}{E_n} = i\omega\mu^{(1)}\underset{(1)}{H_n}, \end{cases} \tag{10}$$

где $x \in (\Pi^+ \cup \Pi^-) \setminus Q^+$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \underset{(1)}{H_a} = -\,i\omega\varepsilon^{(2)}\underset{(1)}{E_a}, \\ \operatorname{rot} \underset{(1)}{E_a} = i\omega\mu^{(2)}\underset{(1)}{H_a}, \end{cases} \tag{11}$$

где $x \in (\Pi^+ \cup \Pi^-) \setminus Q^-$.

Из равенств (5), (8) и (9) следует, что наблюденное поле на поверхности S можно представить в виде суммы полей следующим образом (где индексы «+» и «−» справа вверху у векторов **H** и **E** означают, что рассмотрение ведется либо на верхней, либо на нижней сторонах поверхности S соответственно):

$$\mathbf{H}^+ = \underset{(1)}{\mathbf{H}_n}^+ + \underset{(2)}{\mathbf{H}_n}^+ + \mathbf{H}_a^+, \qquad \mathbf{H}^- = \mathbf{H}_n^- + \underset{(1)}{\mathbf{H}_a}^- + \underset{(2)}{\mathbf{H}_a}^- \tag{12}$$

и аналогично для электрических полей.

В геомагнетизме величина $\mathbf{H}_n$ носит название внешней части геомагнитного поля, а сумма $(\underset{(2)}{\mathbf{H}_n} + \mathbf{H}_a)$ — внутренней части геомагнитного поля.

Методы разделения полного поля на внутреннюю и внешнюю части для случая, когда проводимость Π^+ равна нулю (т. е. когда верхнее полупространство — воздушная среда), хорошо изучены [3, 4], задача же выделения «первичного» аномального поля $(\underset{(1)}{\mathbf{H}_a}, \underset{(1)}{\mathbf{E}_a})$ рассматривается нами, по-видимому, впервые. Выделение этого поля позволяет решать целый ряд важных для теории и практики проблем.

Действительно, «первичное» аномальное поле представляет собой поле, возбуждаемое неоднородностью Q^- в безграничном однородном пространстве с параметрами $\varepsilon^{(2)}$, $\mu^{(2)}$, т. е. это есть «чистая аномалия», не осложненная ни сторонними источниками, ни влиянием границы раздела сред S, поэтому выделение этого поля существенно облегчает решение задачи о нахождении области неоднородности Q^-.

Цель настоящей работы состоит в построении методов разделения суммарного электромагнитного поля на нормальную и аномальную части и выделения первичных нормальных и аномальных полей при условии, что известны параметры полупространств Π^+ и Π^- ($\varepsilon^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\mu^{(2)}$).

2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ В ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим частный случай, когда пространство однородно, т. е. параметры полупространств Π^+ и Π^- совпадают:

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon, \; \mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu.$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I^-(x_0) = \frac{-1}{4\pi} \iint\limits_S [\Delta_\alpha{}^\beta|^{ml} G_{,m}(x_0, y) H_{\alpha\beta}(y) - i\omega\varepsilon\delta^{\beta}_{[m_2}|^{l}_{m_1]} G(x_0, y) E_{\alpha\beta}(y)] \nu_l(y)\, ds_y; \tag{13 *}$$

$$\alpha, \beta, m, l = 1, 2, 3; \; m_1 \neq \alpha; \; m_2 \neq \alpha;$$
$$m_1 < m_2 \text{ при } \alpha \neq 2; \; m_1 > m_2 \text{ при } \alpha = 2;$$

где $\Delta_\alpha{}^\beta|^{ml}$ — 4-индексный объект, определенный в работах [5, 6],

$G(x, y) = \dfrac{1}{|x-y|} e^{ik|x-y|}$ — функция Грина однородного пространства,

$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$ — волновое число;

$$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2};$$

$$G_{,m}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y_m} G(x, y),$$

$$\delta^{\beta}_{[m_2}|^{l}_{m_1]} = \delta_{m_2}{}^\beta \delta_{m_1}{}^l - \delta_{m_1}{}^\beta \delta_{m_2}{}^l;$$

---

* В выражении (13) (как и всюду ниже) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

$$\delta_m{}^l = \begin{cases} 1, & l = m, \\ 0, & l \neq m; \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_a = (H_{a1},\ H_{a2},\ H_{a3}), \quad \mathbf{E}_a = (E_{a1},\ E_{a2},\ E_{a3}),$$

$\mathbf{v} = (\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)$ — единичный вектор нормали к поверхности S, направленный в сторону Π^-.

В работе [6] было показано, что

$$I^-(x_0) = \begin{cases} H_{\alpha\alpha}(x_0) & \text{при} \quad x_0 \in \Pi^+ \\ 0 & \text{при} \quad x_0 \in \Pi^- \end{cases},$$

(при условии, что $\mathbf{H}_a$, $\mathbf{E}_a$ удовлетворяют уравнениям (7)). Выясним, чему равен $I^-(x_0)$ при $x_0 \in S$.

Собственно говоря, когда точка x_0 лежит на поверхности S, интеграл (13) в обычном понимании не имеет смысла. Однако, учитывая известную «гладкость» электромагнитного поля в однородной среде, этому интегралу можно придать вполне определенный смысл.

Выделим точку x_0 из поверхности S сферой σ^* достаточно малого радиуса ρ с центром в точке x_0 и рассмотрим интеграл

$$I_\rho^-(x_0) =$$
$$= -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_{\sigma^*}} [\Delta_\alpha{}^\beta|^{ml} G_{,m}(x_0, y) H_{\alpha\beta}(y) - i\omega\varepsilon \delta^{\beta}_{[m_2}|^{l}_{m_1]} G(x_0, y) E_{\alpha\beta}(y)]\nu_l(y)\, ds_y, \tag{14}$$

где $S_\sigma{}^*$ — часть поверхности S, лежащая вне сферы σ^*.

Если существует предел

$$\lim_{\rho\to 0} I_\rho^-(x_0) = I^-(x_0), \qquad x_0 \in S,$$

то этот предел будем называть сингулярным интегралом в смысле главного значения по Коши.

Покажем, что если S — гладкая в окрестности точка x_0 поверхность, то указанный предел существует.

Обозначим через σ_ρ часть сферы σ^*, лежащую в Π^+, и рассмотрим поверхность S_ρ, состоящую из поверхностей S_{σ^*} и σ_ρ. Тогда, очевидно, интеграл $I_\rho^-(x_0)$ можно представить в следующем виде:

$$I_\rho^-(x_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_\rho} [\ldots]\nu_l(y)\, ds_y + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\sigma_\rho} [\ldots]\nu_l(y)\, ds_y = I_1(\rho) + I_2(\rho). \tag{15}$$

Первый интеграл в правой части равенства (15) при любом значении $\rho > 0$ равен, как показано в [6], нулю:

$$I_1(\rho) \equiv 0,\ \rho > 0. \tag{16}$$

Вычисления показывают, что предел второго интеграла при $\rho \to 0$ равен

$$\lim_{\rho\to 0} I_2(\rho) = \frac{1}{2} H_{\alpha\alpha}(x_0). \tag{17}$$

Переходя в (14) к пределу и учитывая (15), (16) и (17), получаем, что этот предел существует и равен

$$\lim_{\rho\to 0} I_\rho^-(x_0) = I^-(x_0) = \frac{1}{2H_{\alpha\alpha}}(x_0), \tag{18}$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь интеграл

$$I^+(x_0)=\frac{-1}{4\pi}\iint\limits_S [\Delta_\alpha{}^\beta|^{ml}G_{,m}(x_0,y)\,H_{n\beta}(y)-i\omega\varepsilon\delta^{\beta}_{[m_2}|^{l}_{m_1]}G(x,y)\,E_{n\beta}(y)\,]\,\tilde{\nu}_l(y)\,ds_y, \tag{19}$$

где $\mathbf{H}_n=(H_{n1},\ H_{n2},\ H_{n3})$, $\mathbf{E}_n=(E_{n1},\ E_{n2},\ E_{n3})$, $(\tilde{\nu}_1,\ \tilde{\nu}_2,\ \tilde{\nu}_3)$ — единичный вектор нормали к поверхности S, направленный в сторону Π^+ (очевидно, что $\tilde{\nu}_l=-\nu_l$).

В силу уравнений (6) интеграл $I^+(x_0)$, согласно работе [6], равен

$$I^+(x_0)=\begin{cases} H_{n\alpha}(x_0) & \text{при} \quad x_0\in\Pi^-,\\ 0 & \text{при} \quad x_0\in\Pi^+.\end{cases} \tag{20}$$

При $x_0\in S$ интеграл (19) в обычном смысле не существует, однако аналогично тому, как это было сделано выше, можно вычислить сингулярный интеграл $I^+(x_0)$ в смысле главного значения по Коши. Этот интеграл равен

$$I^+(x_0)=1/2H_{n\alpha}(x_0). \tag{21}$$

Из равенств (18) и (21) следует:

$$H_{n\alpha}(x_0)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S [\Delta_\alpha{}^\beta|^{ml}G_{,m}(x_0,y)\,H_{n\beta}(y)-i\omega\varepsilon\delta^{\beta}_{[m_2}|^{l}_{m_1]}G(x_0,y)\,E_{n\beta}(y)\,]\,\nu_l(y)\,ds_y, \tag{22}$$

$$H_{a\alpha}(x_0)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S [\Delta_\alpha{}^\beta|^{ml}G_{,m}(x_0,y)\,H_{a\beta}(y)-i\omega\varepsilon\delta^{\beta}_{[m_2}|^{l}_{m_1]}G(x_0,y)\,E_{a\beta}(y)\,]\,\nu_l(y)\,ds_y. \tag{23}$$

Вычитая из (22), (23) и учитывая (5), получим

$$H_{n\alpha}(x_0)-H_{a\alpha}(x_0)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S [\Delta_\alpha{}^\beta|^{ml}G_{,m}(x_0,y)\,H_\beta(y)-$$

$$-i\omega\varepsilon\delta_{[m_2}|^{l}_{m_1]}G(x_0,y)\,E_\beta(y)\,]\,\nu_l(y)\,ds_y. \tag{24}$$

Введем следующие интегральные операторы:

$$F_\alpha{}^\beta(k)\,\varphi_\beta=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \Delta_\alpha{}^\beta|^{ml}G_{,m}(x_0,y)\,\varphi_\beta(y)\,\nu_l(y)\,ds_y, \tag{25}$$

$$P_\alpha{}^\beta(k)\,\varphi_\beta=\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_S i\omega\delta^{\beta}_{[m_2}|^{l}_{m_1]}G(x_0,y)\,\varphi_\beta(y)\,\nu_l(y)\,ds_y, \tag{26}$$

где φ_β — произвольные функции, интегрируемые с квадратом на S;

$$\alpha,\ \beta,\ m,\ l=1,\ 2,\ 3;\ m_1\neq\alpha;\ m_2\neq\alpha;\ \begin{matrix} m_1<m_2 \ \text{при}\ \alpha\neq 2,\\ m_1>m_2 \ \text{при}\ \alpha=2.\end{matrix}$$

Тогда с помощью соотношения (24) получим следующие формулы для разделения переменных магнитных полей на нормальную и аномальную части:

$$\begin{aligned} H_{n\alpha}&=\frac{1}{2}H_\alpha+\frac{1}{2}F_\alpha{}^\beta(k)\,H_\beta+\frac{1}{2}\,\varepsilon P_\alpha{}^\beta(k)\,E_\beta,\\ H_{a\alpha}&=\frac{1}{2}H_\alpha-\frac{1}{2}F_\alpha{}^\beta(k)\,H_\beta-\frac{1}{2}\,\varepsilon P_\alpha{}^\beta(k)\,E_\beta.\end{aligned} \tag{27}$$

Формулы для разделения электрических компонент переменного электромагнитного поля на нормальную и аномальную части в однородной среде получаются из формул (27) заменой H_α на E_α, E_β на H_β и ε на $(-\mu)$.

В заключение параграфа отметим, что так как среда однородна, то в данном случае вторичные нормальные и аномальные поля равны нулю и

$$\mathbf{H}_n = \underset{(1)}{H_n}, \quad \mathbf{E}_n = \underset{(1)}{E_n},$$
$$\mathbf{H}_a = \underset{(1)}{H_a}, \quad \mathbf{E}_a = \underset{(1)}{E_a}. \tag{28}$$

Следовательно, формулы (27) служат одновременно для вычисления первичных нормальных и аномальных полей.

При условии $\omega = 0$; $\sigma = 0$ формулы (27) переходят в классические формулы разделения постоянного магнитного поля на части внутреннего и внешнего происхождения [3, 4], а формулы для разделения электрических компонент переменного электромагнитного поля, получаемые из (27) заменой H_α на E_α и ε на $(-\mu)$, переходят при $\omega = 0$ в соответствующие формулы для разделения компонент электрического поля постоянного тока, выведенные ранее И. П. Недялковым в работе [1].

3. РАЗДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Обратимся теперь к исходной постановке задачи, когда среда двухслойная, состоит из двух полупространств с постоянными параметрами $\varepsilon^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\mu^{(2)}$. На границе раздела сред выполняются следующие граничные условия:

$$E_\alpha^- = E_\alpha^+ + \frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} (\mathbf{E}^+, \boldsymbol{\nu}) \cdot \nu_\alpha,$$
$$H_\alpha^- = H_\alpha^+ + \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(2)}} (\mathbf{H}^+, \boldsymbol{\nu}) \cdot \nu_\alpha, \tag{29}$$

где $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор нормали к поверхности S, направленный в нижнее полупространство.

Применяя рассуждения, аналогичные описанным в § 2, и учитывая уравнения (6) и (7), получаем:

$$H_{a\alpha}^+ = -F_\alpha{}^\beta(k_1) H_{a\beta}^+ - \varepsilon^{(1)} P_\alpha{}^\beta(k_1) E_{a\beta}^+, \tag{30}$$

$$H_{n\alpha}^- = F_\alpha{}^\beta(k_2) H_{n\beta}^- + \varepsilon^{(2)} P_\alpha{}^\beta(k_2) E_{n\beta}^-. \tag{31}$$

Соответствующие формулы для электрического поля получаются заменой $\mathbf{H}$ на $\mathbf{E}$ и ε на $(-\mu)$.

Учитывая (29), равенство (31) приведем к виду

$$H_{n\alpha}^+ + \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(2)}} (\mathbf{H}^+, \boldsymbol{\nu}) \nu_\alpha = F_\alpha{}^\beta(k_2) H_{n\beta}^+ +$$
$$+ \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(2)}} F_\alpha{}^\beta(k_2) (\mathbf{H}_n^+, \boldsymbol{\nu}) \nu_\beta + \varepsilon^{(2)} P_\alpha{}^\beta(k_2) E_{n\beta}^+. \tag{32}$$

Складывая (30) и (32) и учитывая (5), имеем

$$H_\alpha^+ + \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(2)}} ([\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}_a^+], \boldsymbol{\nu}) \nu_\alpha = F_\alpha{}^\beta(k_2) H_\beta^+ -$$
$$-[F_\alpha{}^\beta(k_1) + F_\alpha{}^\beta(k_2)] H_{a\beta}^+ + \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(2)}} F_\alpha{}^\beta(k_2) ([\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}_a^+], \boldsymbol{\nu}) \nu_\beta +$$
$$+ \varepsilon^{(2)} P_\alpha{}^\beta(k_2) E_\beta^+ - [\varepsilon^{(2)} P_\alpha{}^\beta(k_2) + \varepsilon^1 P_\alpha{}^\beta(k_1)] E_{a\beta}^+. \tag{33}$$

Аналогично для электрического поля

$$E_\alpha^+ + \frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \cdot ([\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}_a^+], \boldsymbol{\nu})\nu_\alpha = F_\alpha^\beta(k_2)E_\beta^+ - [F_\alpha^\beta(k_1) + F_\alpha^\beta(k_2)]E_{a\beta}^+ +$$

$$+ \frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} F_\alpha^\beta(k_2)([\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}_a^+], \boldsymbol{\nu})\nu_\beta +$$

$$+ (-\mu^{(2)}) P_\alpha^\beta(k_2) H_\beta^+ + [\mu^{(2)} P_\alpha^\beta(k_2) + \mu^{(1)} P_\alpha^\beta(k_1)] H_{a\beta}^+. \tag{34}$$

Равенства (33) и (34) образуют систему 6 интегральных уравнений относительно 6 неизвестных (H_{a1}, H_{a2}, H_{a3}, E_{a1}, E_{a2}, E_{a3}). Таким образом, задача разделения суммарного поля на нормальную и аномальную части сводится к решению системы интегральных уравнений.

В то же время задача выделения первичных нормальных и аномальных полей решается непосредственно с помощью следующих интегралов, которые могут быть получены по аналогии с интегралами (27):

$$\begin{aligned} \underset{(1)}{H_{n\alpha}^+} &= \frac{1}{2} H_\alpha^+ + \frac{1}{2} F_\alpha^\beta(k_1) H_\beta^+ + \frac{1}{2}\varepsilon^{(1)} P_\alpha^\beta(k_1) E_\beta^+, \\ \underset{(1)}{H_{a\alpha}^-} &= \frac{1}{2} H_\alpha^- - \frac{1}{2} F_\alpha^\beta(k_2) H_\beta^- - \frac{1}{2}\varepsilon^{(2)} P_\alpha^\beta(k_2) E_\beta^-, \end{aligned} \tag{35}$$

и аналогично для электрических полей.

4. РАЗДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ, ЗАДАННЫХ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Большое прикладное значение имеет частный случай, когда поверхность S есть горизонтальная плоскость: $x_3 = 0$. Тогда уравнения (33) принимают вид:

$$H_{\hat\alpha} = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} [G^{(2)}_{,\hat\alpha} H_3 + G^{(2)}_{,3} H_{\hat\alpha}]\, dy_1\, dy_2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} [(G^{(1)}_{,\hat\alpha} + G^{(2)}_{,\hat\alpha}) H_{a3} + (G^{(1)}_{,3} + G^{(2)}_{,3}) H_{a\hat\alpha}]\, dy_1\, dy_2 -$$

$$- \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(2)}} \cdot \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{(2)}_{,\hat\alpha} (H_3 - H_{a3})\, dy_1\, dy_2 +$$

$$+ i\omega\varepsilon^{(2)} (-1)^{m\hat\alpha} \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{(2)} (E_{m\hat\alpha} - E_{am\hat\alpha})\, dy_1\, dy_2 -$$

$$- i\omega\,\varepsilon^{(1)} (-1)^{m\hat\alpha} \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{(1)} E_{am\hat\alpha}\, dy_1\, dy_2, \tag{36}$$

$$H_3 + \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(2)}} (H_3 - H_{a3}) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty} [G^{(2)}_{,3} H_3 - G^{(2)}_{,1} H_1 - G^{(2)}_{,2} H_2]\, dy_1\, dy_2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} [(G^{(1)}_{,3} + G^{(2)}_{,3}) H_{a3} - (G^{(1)}_{,1} + G^{(2)}_{,1}) H_{a1} - (G^{(1)}_{,2} + G^{(2)}_{,2}) H_{a2}]\, dy_1\, dy_2 -$$

$$- \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(2)}} \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{(2)}_{,3} (H_3 - H_{a3})\, dy_1\, dy_2, \tag{37}$$

где $G^{(1)}$ — функция Грина однородного пространства с волновым числом k_1; $G^{(2)}$ — функция Грина однородного пространства с волновым числом k_2;

$$\hat{\alpha} \neq 3;\ m_{\hat{\alpha}} = \begin{cases} 1, & \hat{\alpha} = 2, \\ 2, & \hat{\alpha} = 1 \end{cases}$$

(индексы «+» у векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ здесь и всюду ниже опущены для упрощения записи).

Воспользуемся разложением функции Грина

$$G^{(1,2)}(x, y) = \frac{i}{4\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i[\Omega_1(x_1-y_1)+\Omega_2(x_2-y_2)]}}{\Omega_3^{(1,2)}} d\Omega_1\, d\Omega_2, \tag{38}$$

где $\Omega_3^{(1,2)} = i\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - k_{1,2}^2}$.

Введем обозначения, принятые в работе [6]:

$$h_\alpha = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} H_\alpha(y_1, y_2, 0)\, e^{-i(\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2)}\, dy_1\, dy_2,$$

$$e_\alpha = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} E_\alpha(y_1, y_2, 0)\, e^{-i(\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2)}\, dy_1\, dy_2, \tag{39}$$

где h_α, e_α — пространственные спектры магнитного и электрического полей. Подставим (38) в (37), поменяем местами порядок интегрирования и воспользуемся обозначениями (39), получим

$$H_3 + \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(2)}}(H_3 - H_{a3}) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2)} \left\{ -h_3 - \frac{\Omega_1}{\Omega_3^{(2)}} h_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\Omega_2}{\Omega_3^{(2)}} h_2 + \frac{\Omega_3^{(1)} + \Omega_3^{(2)}}{\Omega_3^{(1)}\, \Omega_3^{(2)}} (\Omega_1 h_{a1} + \Omega_2 h_{a2}) - \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(2)}} (h_3 - h_{a3}) \right\} d\Omega_1\, d\Omega_2. \tag{40}$$

В силу условия $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ и свойств спектров аномального поля, описанных в [6], имеем

$$h_{a3} = -\frac{\Omega_1 h_{a1} + \Omega_2 h_{a2}}{\Omega_3^{(1)}}. \tag{41}$$

Применяя преобразование Фурье (39) к левой и правой частям равенства (40) и учитывая (41), запишем

$$-2h_3 - 2\frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(2)}}(h_3 - h_{a3}) = -h_3 - \frac{\Omega_1}{\Omega_3^{(2)}} h_1 -$$

$$- \frac{\Omega_2}{\Omega_3^{(2)}} h_2 - \frac{\Omega_3^{(1)} + \Omega_3^{(2)}}{\Omega_3^{(2)}} h_{a3} - \frac{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}{\mu^{(2)}} (h_3 - h_{a3}), \tag{42}$$

откуда окончательно получаем

$$h_{a3} = \frac{\dfrac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}} \Omega_3^{(2)} h_3 - \Omega_1 h_1 - \Omega_2 h_2}{\dfrac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}} \Omega_3^{(2)} + \Omega_3^{(1)}}. \tag{43}$$

Аналогичные преобразования, выполняемые с уравнениями (36), приводят нас к естественным условиям:

$$
\begin{aligned}
-i\omega\varepsilon^{(1)} e_{a1} &= i\Omega_3^{(1)} h_{a2} - i\Omega_2 h_{a3},\\
i\omega\varepsilon^{(1)} e_{a2} &= i\Omega_3^{(1)} h_{a1} - i\Omega_1 h_{a3}.
\end{aligned} \tag{44}
$$

Уравнения (34) при условии, что S — плоскость, сводятся к следующим равенствам для спектров полей:

$$
e_{a3} = \frac{\dfrac{\varepsilon^{(1)}}{\varepsilon^{(2)}}\Omega_3^{(2)} e_3 - \Omega_1 e_1 - \Omega_2 e_2}{\dfrac{\varepsilon^{(1)}}{\varepsilon^{(2)}}\Omega_3^{(2)} + \Omega_3^{(1)}}, \tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
-i\omega\mu^{(1)} h_{a1} &= -i\Omega_3^{(1)} e_{a2} - i\Omega_2 e_{a3},\\
i\omega\mu^{(1)} h_{a2} &= -i\Omega_3^{(1)} e_{n1} + i\Omega_1 e_{a3}.
\end{aligned} \tag{46}
$$

Решая (44) и (46) совместно относительно h_{a1}, h_{a2}, e_{a1}, e_{a2}, имеем:

$$
\begin{aligned}
h_{a1} &= \frac{\varepsilon^{(1)}\omega\Omega_2 e_{a3} - \Omega_1\Omega_3^{(1)} h_{a3}}{(\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2},\\
h_{a2} &= \frac{-\varepsilon^{(1)}\omega\Omega_1 e_{a3} - \Omega_2\Omega_3^{(1)} h_{a3}}{(\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2},\\
e_{a1} &= \frac{\mu^{(1)}\omega\Omega_2 h_{a3} - \Omega_1\Omega_3^{(1)} e_{a3}}{(\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2},\\
e_{a2} &= \frac{-\mu^{(1)}\omega\Omega_1 h_{a3} - \Omega_2\Omega_3^{(1)} e_{a3}}{(\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2}.
\end{aligned} \tag{47}
$$

Подставляя (43) и (45) в (47), найдем выражения для спектров аномальных полей через полные (наблюденные) поля. Обратное преобразование Фурье позволяет перейти от пространственных спектров к самим аномальным полям

$$
(H_{a\alpha}, E_{a\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} (h_{a\alpha}, e_{a\alpha})\, e^{i(\Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2)}\, d\Omega_1\, d\Omega_2. \tag{48}
$$

Тем самым завершается решение системы интегральных уравнений (33), (34) для случая, когда S — горизонтальная плоскость.

Отметим, что в случае, когда проводимость верхнего полупространства Π^+ равна нулю, пренебрегая в Π^+ токами смещения, можно вычислить аномальные (и нормальные) магнитные поля только по самому наблюденному магнитному полю (без учета электрического поля). Действительно, в этом случае $\varepsilon^{(1)} = 0$ и из (47) имеем:

$$
\begin{aligned}
h_{a1} &= -i\frac{\Omega_1}{\sqrt{(\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2}} h_{a3},\\
h_{a2} &= -i\frac{\Omega_2}{\sqrt{(\Omega_1)^2 + (\Omega_2)^2}} h_{a3}.
\end{aligned} \tag{49}
$$

В общем же случае анализ выражений (43)—(47) показывает, что для выделения вертикальных компонент аномального (и нормального) магнитного или электрического полей достаточно знать на поверхности S только магнитные или только электрические поля соответственно, в то время как для выделения горизонтальных компонент аномальных и нормальных полей, в общем случае, необходимо задание как электрических, так и магнитных компонент полного поля. Аналогичная ситуация имеет место и при выделении первичных нормальных и аномальных полей. Действительно, интегралы (35) в рассматриваемом случае приобретают следующий вид:

$$\left\{\begin{aligned} &\underset{(1)}{H}{}^{+}_{n\hat{\alpha}} = \frac{1}{2} H^{+}_{\hat{\alpha}} - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} [G^{(1)}_{,\hat{\alpha}} H_3{}^{+} + G^{(1)}_{,3} H^{+}_{\hat{\alpha}} - \\ &\quad - i\omega\varepsilon^{(1)} (-1)^{m} \hat{\alpha} G^{(1)} E^{+}_{m\hat{\alpha}}]\, dy_1\, dy_2, \quad \hat{\alpha} \neq 3; \\ &\quad \underset{(1)}{H}{}^{+}_{n3} = \frac{1}{2} H_3{}^{+} - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} [G^{(1)}_{,3} H_3{}^{+} - \\ &\quad\quad - G^{(1)}_{,1} H_1{}^{+} - G^{(1)}_{,2} H_2{}^{+}]\, dy_1\, dy_2; \end{aligned}\right. \tag{50}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\underset{(1)}{H}{}^{-}_{a\hat{\alpha}} = \frac{1}{2} H^{-}_{\hat{\alpha}} + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} [G^{(2)}_{,\hat{\alpha}} H_3{}^{-} + G^{(2)}_{,3} H^{-}_{\hat{\alpha}} - \\ &- i\omega\, \varepsilon^{(2)} (-1)^{m\hat{\alpha}} G^{(2)} E^{-}_{m_{\alpha}}]\, dy_1\, dy_2, \ \hat{\alpha} \neq 3, \\ &\underset{(1)}{H}{}^{-}_{a3} = \frac{1}{2} H_3{}^{-} + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} [G^{(2)}_{,3} H_3{}^{-} - \\ &- G^{(2)}_{,1} H_1{}^{-} - G^{(2)}_{,2} H_2{}^{-}]\, dy_1\, dy_2 \end{aligned}\right. \tag{51}$$

(соответствующие формулы для электрических полей аналогичны выражениям (50)–(51)).

Следовательно, вертикальные компоненты первичных нормальных и аномальных магнитных или электрических полей определяются по самим полным магнитным или электрическим полям, а выделение горизонтальных составляющих требует знания всех компонент электромагнитного поля. В частном случае, когда Π^{+} — воздушное пространство — изолятор, пренебрегая токами смещения, из (50) получим

$$H^{+}_{n\hat{\alpha}} = \frac{1}{2} H^{+}_{\hat{\alpha}} - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} [G^{(1)}_{,\hat{\alpha}} H_3{}^{+} + G^{(1)}_{,3} H^{+}_{\hat{\alpha}}]\, dy_1\, dy_2, \tag{52}$$

что соответствует известным методам разделения геомагнитного поля на внешнюю и внутреннюю части [1, 3, 4].

Предложенные выше методы разделения полей могут быть с помощью теории, развитой в работе [7], применены для анализа двумерных электромагнитных полей. Причем необходимо отметить, что при этом появляется возможность разделить магнитное поле на составляющие, не используя электрические компоненты полного поля (при условии E-поляризации поля). Действительно, в двумерном случае, как и в трехмерном, вертикальные составляющие аномального и «первичного» аномального полей определяются с помощью одних магнитных компонент наблюденного поля. Знание же величин H_{a3} и $\underset{(1)}{H}_{a3}$ позволяет в двумерном случае, в силу соленоидальности поля, восстановить горизонтальные компоненты выделенных магнитных полей. Этот факт имеет большое прикладное значение, так как на практике важно уметь разделять магнитные поля только по результатам магнитных измерений.

В заключение выражаю благодарность проф. М. Н. Бердичевскому за полезные обсуждения.

Московский институт нефтехимической
и газовой промышленности
имени И. М. Губкина

Поступила
14 III 1972

Литература

1. Недялков И. П. Разделение потенциальных полей. Изв. АН СССР. Физика Земли, № 12, 1965.
2. Захаров Е. В., Ильин И. В. Интегральные представления электромагнитных полей в неоднородной слоистой среде. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 8, 1970.
3. Рикитаки Г. Электромагнетизм и внутреннее строение Земли. Л., «Недра», 1968.
4. Яновский Б. М. Земной магнетизм. I. Изд-во ЛГУ, 1964.
5. Жданов М. С. Развитие теории аналитического продолжения потенциальных полей в криволинейных трехмерных областях. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 2, 1973.
6. Жданов М. С. Об аналитическом продолжении трехмерных электромагнитных полей. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 4, 1973.
7. Жданов М. С. Об аналитическом продолжении двумерных электромагнитных полей. Изв. АН СССР. Физика Земли, № 6, 1973.