АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ФИЗИКА ЗЕМЛИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

2

МОСКВА · 1973

ФИЗИКА ЗЕМЛИ

№ 2 1973

УДК 550.831

М. С. ЖДАНОВ

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассматривается задача аналитического продолжения трехмерных потенциальных полей с произвольной поверхности наблюдения в верхнее и нижнее полупространства. Решение задачи осуществляется с помощью развитой в работе «приведенной» теории Моисила — Теодореску, позволяющей перенести на трехмерный случай методы и результаты, полученные при изучении плоских полей.

Аппарат теории функций одного комплексного переменного позволяет с единой точки зрения исследовать целый ряд задач теории аналитического продолжения гравитационных и магнитных аномалий. Однако все многообразие полученных в этом направлении результатов может быть использовано в основном лишь для описания двумерных полей, что связано с существенно двумерной природой теории функций одного комплексного переменного.

Вопрос об обобщении указанных результатов на трехмерный случай давно уже стоит перед исследователями, однако решение его до недавнего времени тормозилось отсутствием соответствующего математического аппарата.

В настоящее время эта проблема, на наш взгляд, может быть решена с помощью предложенной и исследованной румынскими математиками Гр. К. Моисилом и Н. Теодореску линейной системы дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка (МТ), являющейся трехмерным аналогом системы Коши — Римана [1].

Нужно отметить, что теория Моисила — Теодореску связана с изучением более общих функций, чем те, которые используются для описания геофизических полей. Поэтому для геофизических приложений мы предлагаем рассматривать некоторую «приведенную» систему МТ, которой удовлетворяют только лишь гармонические функции. На этом пути мы приходим к упрощенной теории, более удобной для исследований потенциальных полей, чем теория Моисила — Теодореску. Основы этой «приведенной» теории излагаются ниже.

§ 1. ОСНОВЫ «ПРИВЕДЕННОЙ» ТЕОРИИ МОИСИЛА — ТЕОДОРЕСКУ

Пусть в некоторой замкнутой области $\overline{V}$ трехмерного пространства с кусочно-гладкой границей S заданы две гармонические функции:

$$f(x) \quad \text{и} \quad g(x),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ — координаты точки в пространстве.

Обозначим

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = f_{,k} \quad (k = 1, 2, 3), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k\, \partial x_l} = f_{,kl} \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Рассмотрим четырехиндексную матрицу отбора

$$\Delta_\alpha^\beta \big|^{kl},$$

где $\alpha, \beta, k, l = 1, 2, 3$.

Компоненты $\Delta_\alpha{}^\beta|^{kl}$ даются следующей таблицей.

	$k = 1\ 2\ 3$	$\alpha = 1;$			$\alpha = 3;$			$\alpha = 3$		
$\beta = 1$	$l = 1$	$+1$	0	0	0	$+1$	0	0	0	$+1$
	$l = 2$	0	$+1$	0	-1	0	0	0	0	0
	$l = 3$	0	0	$+1$	0	0	0	-1	0	0
$\beta = 2$		0	-1	0	$+1$	0	0	0	0	0
		$+1$	0	0	0	$+1$	0	0	0	$+1$
		0	0	0	0	0	$+1$	0	-1	0
$\beta = 3$		0	0	-1	0	0	0	$+1$	0	0
		0	0	0	0	0	-1	0	$+1$	0
		$+1$	0	0	0	$+1$	0	0	0	$+1$

Матрица $\Delta_\alpha{}^\beta|^{kl}$ обладает следующими свойствами:

1. $\Delta_\alpha^\beta|^{kl} = -\Delta_\alpha^\beta|^{lk}$ при $\alpha \neq \beta$;

2. $\Delta_\alpha^\alpha|^{kl} = \delta^{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l \end{cases}$

при любом $\alpha = 1, 2, 3$.

3. $\Delta_\alpha^\beta|^{kl} = -\Delta_\alpha^l|^{k\beta}$ при $\alpha \neq k$;

4. $\Delta_\alpha^\beta|^{\alpha l} = \delta^{\beta l} = \begin{cases} 1, & \beta = l, \\ 0, & \beta \neq l \end{cases}$

при любом $\alpha = 1, 2, 3$.

Справедлива следующая

Л е м м а 1. Всюду в области V

$$\frac{\partial}{\partial x_l}[\Delta_\alpha^\beta|^{kl} f_{,k} \cdot g_{,\beta}] \equiv 0. \qquad (1)^*$$

Доказательство

$$\frac{\partial}{\partial x_l}[\Delta_\alpha^\beta|^{kl} f_{,k} g_{,\beta}] = \Delta_\alpha^\beta|^{kl} f_{,kl} g_{,\beta} + \Delta_\alpha^\beta|^{kl} f_{,k} g_{,\beta l} \stackrel{\text{def}}{=} F.$$

Воспользуемся свойствами 1 и 3.

Так как $\Delta_\alpha{}^\beta|^{kl}$ кососимметричен по индексам k, l и β, l, а функции $f_{,kl}$ и $g_{,\beta l}$ симметричны по этим индексам, т. е.

$$f_{,kl} = f_{,lk}, \qquad g_{,\beta l} = g_{,l\beta},$$

то члены с индексами $\alpha \neq \beta$ и $\alpha \neq k$ пропадают, получаем

$$F = \Delta_\alpha^\alpha|^{kl} f_{,kl} g_{,\alpha} + \Delta_\alpha^\beta|^{\alpha l} f_{,\alpha} g_{,\beta l} = g_{,\alpha}[\delta^{kl} f_{,kl}] + f_{,\alpha}[\delta^{\beta l} g_{,\beta l}] =$$
$$= g_{,\alpha}[f_{,11} + f_{,22} + f_{,33}] + f_{,\alpha}[g_{,11} + g_{,22} + g_{,33}] \equiv 0,$$

так как функции $f(x)$ и $g(x)$ гармонические, т. е. удовлетворяют уравнению Лапласа.

Тем самым утверждение леммы доказано.

Следствие 1. Интегрируя тождество (1) по всей области V и используя формулу Остроградского — Гаусса, получаем

$$\iint_S \Delta_\alpha^\beta|^{kl} f_{,k}(y) g_{,\beta}(y) \cdot \nu_l(y)\, ds_y = 0, \qquad (2)$$

* В выражении (1) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

где $y=(y_1,\ y_2,\ y_3)$ — координата текущей точки поверхности S; $\nu = (\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке $y \in S$.

Лемма 2. Пусть функция $f(y) = 1/\ |x-y|$, где x — некоторая фиксированная точка области V.

Тогда

$$\lim \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{|x-y|=\delta} \Delta_\alpha^\beta\Big|^{kl} \frac{x_k - y_k}{|x-y|^3} \nu_l(y) g_{,\beta}(y)\, ds_y = -g_{,\alpha}(x), \tag{3}$$

где $\nu_l(y) = \dfrac{y_l - x_l}{|y-x|}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $|x-y| = \delta$.

Доказательство

$$\iint\limits_{|x-y|=\delta} \Delta_\alpha^\beta\Big|^{kl} \frac{x_k - y_k}{|x-y|^3} \nu_l(y) g_{,\beta}(y)\, ds_y =$$

$$= -\iint\limits_{|x-y|=\delta} \Delta_\alpha^\beta\Big|^{kl} \frac{(x_k-y_k)(x_l-y_l)}{|x-y|^4} g_{,\beta}(y)\, ds_y =$$

$$= -\iint\limits_{|x-y|=\delta} \frac{1}{\delta^4}[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2] g_{,\alpha}(y)\, ds_y =$$

$$= -\frac{1}{\delta^2} g_{,\alpha}(\bar{x}) \iint\limits_{|x-y|=\delta} ds_y = -\frac{4\pi\delta^2}{\delta^2} g_{,\alpha}(\bar{x}),$$

где $|\bar{x} - x| = \delta$.

Устремляя в последнем выражении $\delta \to 0$, получаем соотношение (3), что и доказывает утверждение леммы.

Следствие 2. Обозначим шар радиуса δ с центром в точке x через $O_\delta(x)$. Подставим в выражении (2) вместо $f(y)$ функцию $\dfrac{1}{|x-y|}$ а в качестве области интегрирования рассмотрим область $V^* = V \setminus \overline{O_\delta(x)}$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$ и опираясь на лемму 2, получим

$$g_{,\alpha}(x) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \Delta_\alpha^\beta\Big|^{kl} g_{,\beta}(y) \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \nu_l(y)\, ds_y, \tag{4}$$

$$x \in V.$$

Соотношения (2) и (4) можно рассматривать как трехмерные аналоги теоремы об интегрировании по контуру комплексно-аналитической функции и интегральной теоремы Коши для функций комплексного переменного.

§ 2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ГРАДИЕНТА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАБЛЮДЕНИЯ В ВЕРХНЕЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Рассмотрим некоторую кусочно-гладкую поверхность S, проходящую через бесконечно удаленную точку

$$S\colon \left\{ x_l = x_l(s,t), \quad \begin{matrix} -\infty < s < \infty \\ -\infty < t < \infty \end{matrix} \right\}$$

причем $0 \geqslant x_3(s,\ t) \geqslant -h$. Верхнее полупространство, ограниченное поверхностью S, обозначим Ω^+.

Пусть функция $g(x)$ гармонична в $\overline{\Omega^+}$ и нам известны значения $\operatorname{grad} g(x) = \{g_{,\alpha}(x)\}$ на поверхности S.

Рассмотрим точку $x_0 \in \Omega^+$. Построим сферу $O_R(x_0)$ с центром в точке x_0 и радиуса R. Часть этой сферы, принадлежащую Ω^+, обозначим C_R.

Сфера $O_R(x_0)$ вырезает на поверхности S некоторую часть S_R:

$$S_R = \{x\colon (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2 \leqslant R, \quad x \in S\}.$$

Рассмотрим замкнутую поверхность

$$\gamma_R = S_R \cup C_R.$$

По следствию 2 § 1 получаем

$$g_{,\alpha}(x_0) = \frac{-1}{4\pi} \Delta_\alpha^\beta\Big|^{kl} \iint\limits_{\gamma_R} g_{,\beta}(y) \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{1}{|x_0 - y|}\right) \nu_l \, ds_y. \tag{5}$$

Интеграл по поверхности γ_R можно разбить на два интеграла:

$$\iint\limits_{\gamma_R} \ldots = \iint\limits_{C_R} \ldots + \iint\limits_{S_R} \ldots .$$

Рассмотрим первый из них:

$$\left| \frac{-1}{4\pi} \Delta_\alpha^\beta\Big|^{kl} \iint\limits_{C_R} g_{,\beta}(y) \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{1}{|x - y|}\right) \nu_l(y) \, ds_y \right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2} \left| \iint\limits_{C_R} g_{,\alpha}(y) \, ds_y \right| \leqslant \max_{y \in C_R} |g_{,\alpha}(y)|.$$

Потребуем, чтобы

$$\max_{y \in C_R} |g_{,\alpha}(y)| \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

Тогда

$$\iint\limits_{C_R} \ldots \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

Таким образом, переходя в (5) в пределу при $R \to \infty$, получаем

$$g_{,\alpha}(x_0) = \frac{-1}{4\pi} \iint\limits_{S} \Delta_\alpha^\beta\Big|^{kl} \frac{x_{k_0} - y_k}{|x_0 - y|^3} \nu_l(y) \, g_{,\beta}(y) \, ds_y, \tag{6}$$

где $\nu_l(y)$ — вектор нормали к поверхности S, направленный в нижнее полупространство.

Формула (6) позволяет по значениям градиента гармонической функции $g(y)$ на некоторой поверхности S восстановить значения этой функции всюду в верхнем полупространстве, ограниченном поверхностью S.

Отметим, что формула (6) в принципе может быть получена с помощью обычных методов теории потенциала (см., например, работы М. С. Молоденского [2] и В. О. Сергеева [3]). В рассматриваемой теории это соотношение играет вспомогательную роль и служит для построения общей интегральной формулы аналитического продолжения трехмерных потенциальных полей с криволинейного рельефа в нижнее полупространство.

§ 3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ГРАДИЕНТА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАБЛЮДЕНИЯ В НИЖНЕЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Пусть выполнены условия § 2 и функция $g(x)$ гармонична во всем полупространстве $x_3 > -H$ $(H > h)$ и достаточно быстро убывает на бесконечности (точная оценка необходимой скорости убывания $g(x)$ на бесконечности будет дана ниже).

Тогда для любой точки $x = (x_1, x_2, x_3)$; $x_3 > -H$ справедливо равенство

$$g_{,\alpha}(x) = \frac{-i}{8\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega,x)}}{\sqrt{-u^2-v^2}} \left\{ \iint\limits_S \Delta_\alpha^\beta \Big|^{kl} \frac{\partial e^{-i(\omega,y)}}{\partial y_k} \nu_l(y)\, g_{,\beta}(y)\, ds_y \right\} du\, dv, \quad (7)$$

где $\nu_l(y)$ — вектор нормали к поверхности S, направленный в нижнее полупространство;

$$\omega = (u,\ v,\ \sqrt{-u^2-v^2}),$$

$$(\omega;\ x) = u \cdot x_1 + v \cdot x_2 + \sqrt{-u^2-v^2} \cdot x_3.$$

Действительно, рассмотрим известное разложение [4]

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{i}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega,x-y)} \frac{du\, dv}{\sqrt{-u^2-v^2}}, \quad (8)$$

верное для $x_3 > y_3$.

Пусть x — произвольная точка пространства, причем $x_3 > -H$.

Выберем столь малое ε, что $x_3 > -H + \varepsilon$. Проведем горизонтальную плоскость

$$x_3 = -H + \varepsilon.$$

Обозначим ее через Σ.

Согласно формуле (6) § 2

$$g_{,\alpha}(x) = \frac{-1}{4\pi} \iint\limits_\Sigma \Delta_\alpha^\beta \Big|^{kl} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) \nu_l g_{,\beta}\, ds_y. \quad (9)$$

Подставим (8) в (9), и, так как все интегралы сходятся равномерно по соответствующим параметрам, поменяем порядок интегрирования. Получим

$$g_{,\alpha}(x) = \frac{-i}{8\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega\cdot x)}}{\sqrt{-u^2-v^2}} \left\{ \iint\limits_\Sigma \Delta_\alpha^\beta \Big|^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} e^{-i(\omega\cdot y)} \right) \nu_l(y)\, g_{,\beta}(y)\, ds_y \right\} du\, dv. \quad (10)$$

Аналогично § 2 построим сферу $O_R(x)$, где x — любая точка верхнего полупространства $(x_3 > -H)$.

Часть этой сферы, заключенную между поверхностями S и Σ, обозначим $\tilde{C}_R$. Сфера $O_R(x)$ вырезает из поверхности S некоторую часть S_R, а из поверхности Σ — некоторую часть Σ_R.

Рассмотрим замкнутую поверхность

$$\Gamma_R = S_R \cup \tilde{C}_R \cup \Sigma_R.$$

Так как функция $e^{-i(\omega\cdot x)}$ гармонична внутри Γ_R, то по следствию 1 § 1 получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-u^2-v^2}} \iint\limits_{\Gamma_R} \Delta_\alpha^\beta \Big|^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} e^{-i(\omega,y)} \right) \bar{\nu}_l(y)\, g_{,\beta}(y)\, ds_y = 0, \quad (11)$$

где $\bar{\nu}(y)$ — вектор внешней нормали к поверхности Γ_R.

Интеграл (11) можно представить в виде суммы трех интегралов:

$$\frac{1}{\sqrt{-u^2-v^2}}\left\{\iint\limits_{S_R}\ldots+\iint\limits_{\Sigma_R}\ldots+\iint\limits_{\widetilde{C}_R}\ldots\right\}=0. \qquad (12)$$

Оценим по модулю интеграл по $\widetilde{C}_R$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{-u^2-v^2}}\iint\limits_{\widetilde{C}_R}\{\ldots\}\,\bar{\nu}_l(y)\,dS_y\right|\leqslant\iint\limits_{\widetilde{C}_R}|\Delta_\alpha{}^{\beta\,kl}|\cdot\left|\frac{\omega_k}{\sqrt{u^2+v^2}}\right|\cdot|e^{-i(\omega;\,y)}|\times$$

$$\times\left|\frac{x_l-y_l}{|x-y|}\right|\,|g_{,\beta}(y)|\,ds_y=\Phi.$$

Но $|e^{-i(\omega,\,y)}|\leqslant 1$, так как $y_3<0$,

$$\left|\frac{x_l-y_l}{x-y}\right|\leqslant 1,\qquad\left|\frac{\omega_k}{\sqrt{u^2+v^2}}\right|\leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\Phi\leqslant C\cdot 2\pi RH\max_{y\in\widetilde{C}_R}|g_{,\beta}(y)|=\varphi(R).$$

Потребуем, чтобы

$$\lim_{R\to\infty}R\max_{y\in\widetilde{C}_R}|g_{,\beta}(y)|=0.$$

Тогда

$$\varphi(R)\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Таким образом, переходя к пределу в (12) при $R\to\infty$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-u^2-v^2}}\left\{\iint\limits_{S}\{\ldots\}\,\bar{\nu}_l(y)\,dS_y+\iint\limits_{\Sigma}\{\ldots\}\,\bar{\nu}_l(y)\,ds_y\right\}=0$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{-u^2-v^2}}\iint\limits_{\Sigma}\{\ldots\}\,\bar{\nu}_l(y)\,dS_y=\frac{1}{\sqrt{-u^2-v^2}}\iint\limits_{S}\{\ldots\}\,\nu_l(y)\,ds_y, \qquad (13)$$

где $\nu_l(y)$ — вектор нормали к поверхности S, направленный в нижнее полупространство. Так как указанный переход к пределу выполняется равномерно по ω, то он возможен и под знаком внешнего интеграла в выражении (10).

Преобразуя указанным образом выражение (10), мы и приходим к соотношению (7).

Выражение (7) можно привести к следующему виду:

$$g_{,\alpha}(x)=\frac{-1}{8\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(\omega\cdot x)}}{\sqrt{-u^2-v^2}}\left\{\iint\limits_{S}\Delta_\alpha^\beta|^{kl}\,\omega_k\nu_l(y)\,g_{,\beta}(y)\,e^{-i(\omega,y)}\,dS_y\right\}du\,dv,$$

$$x_3>-H. \qquad (14)$$

Соотношение (14) дает решение задачи об аналитическом продолжении градиента гармонической функции в нижнее полупространство до горизонтальной плоскости, проходящей через ближайшую особую точку функции $g(x)$.

Рассмотрим частный случай, когда поверхность S есть горизонтальная плоскость, проходящая через начало координат

$$S\colon x_3=0.$$

Тогда формула (14) примет вид

$$g_{,\alpha}(x) = \frac{1}{8\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega \cdot x)}}{\sqrt{-u^2 - v^2}} \Delta_\alpha \Big|^{k3} \omega_k \left\{ \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g_{,\beta}(y)\, e^{-i(\omega \cdot y)}\, dy_1\, dy_2 \right\} du\, dv, \tag{15}$$

где координаты точки $y = (y_1, y_2, 0)$.

Внутренний интеграл в (15) есть двукратное преобразование Фурье функции $g_{,\beta}(y_1, y_2, 0)$.

Введем обозначения

$$S(u, v) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y_1, y_2, 0)\, e^{-i(uy_1 + vy_2)}\, dy_1\, dy_2, \tag{16}$$

$$S_{,\alpha}(u, v) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g_{,\alpha}(y_1, y_2, 0)\, e^{-i(uy_1 + vy_2)}\, dy_1\, dy_2. \tag{17}$$

Из теории двукратного преобразования Фурье аномальных потенциальных полей известно [5], что

$$S_{,\alpha}(u, v) = i\omega_\alpha S(u, v). \tag{18}$$

Используя равенства (16), (17) и (18) соотношение (15) приводим к виду

$$g_{,\alpha}(x) = \frac{i}{8\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega, x)}}{\sqrt{-u^2 - v^2}} \Delta_\alpha^\beta \Big|^{k3} \omega_k \omega_\beta S(u, v)\, du\, dv. \tag{19}$$

Отметим, что объект $\Delta_\alpha^\beta \big|^{kl}$ кроме свойств 1—4 обладает также следующим свойством (из которого, кстати, вытекает свойство 3):

5. $\Delta_\alpha^\beta \big|^{kl} = \delta_\alpha^\beta \delta_k^l - \delta_k^\beta \delta_\alpha^l$ при $\alpha \neq k$.

Учитывая свойства 4 и 5, получаем

$$\Delta_\alpha^\beta \Big|^{k3} \omega_k \omega_\beta = 2\omega_3 \omega_\alpha.$$

Тогда соотношение (19) принимает вид

$$g_{,\alpha}(x) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega \cdot x)} S_{,\alpha}(u, v)\, du\, dv. \tag{20}$$

Или, рассматривая вместо $g_{,\alpha}(x)$ любую гармоническую в верхнем полупространстве функцию $f(x)$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(ux_1 + vx_2 + \sqrt{-u^2 - v^2}\, x_3)} \times$$

$$\times \left\{ \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, y_2, 0)\, e^{-i(uy_1 + vy_2)}\, dy_1\, dy_2 \right\} du\, dv. \tag{21}$$

Если ввести обозначение $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$, то формула (22) принимает вид

$$f(x_1, x_2 - H) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(ux_1 + vx_2)}\, e^{\rho H} \left\{ \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y_1, y_2, 0)\, e^{-i(uy_1 + vy_2)}\, dy_1\, dy_2 \right\} du\, dv. \tag{22}$$

Соотношение (22) представляет собой хорошо известную интегральную формулу для аналитического продолжения потенциальных функций с плоскости наблюдения в нижнее полупространство на глубину H [5].

§ 4. ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ПРОИЗВОДНЫХ ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим некоторые приложения интегральных соотношений (6) и (14) для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

При решении геологических задач с помощью гравитационной разведки в ряде случаев проводятся съемки с гравитационным вариометром или градиентометром. Эти съемки позволяют измерять величины вторых производных потенциала силы тяжести V_{xz}, V_{xy}, V_{yz}, V_{Δ}, V_{zz}.

Если измерения производятся в местности со значительными колебаниями высот рельефа, то возникает необходимость редуцирования значений вторых производных гравитационного потенциала на горизонтальную плоскость. Эта редукция может быть осуществлена с помощью соотношения (6) или (14), если в качестве функции $g(x)$ рассмотреть, например, величину V_z.

Соответствующие вычислительные схемы строятся на базе формул (6) и (14) по аналогии со схемами для пересчета поля с горизонтального на горизонтальный уровень [5].

При интерпретации магнитных аномалий в горной местности также возникает проблема редуцирования полей на горизонтальную плоскость. Эта операция может быть осуществлена с помощью соотношений (6) или (14), если в качестве компонент $g_{,\alpha}(x)$ рассмотреть три компоненты магнитного поля Земли — X, Y, Z. Нужно отметить, что одновременное измерение трех компонент магнитного поля начинает постепенно входить в практику магниторазведочных работ [6]; для интерпретации таких трехкомпонентных измерений может быть широко использован развитый в данной работе метод трансформаций трехмерных потенциальных полей.

Наконец, изложенная выше общая теория может быть использована для решения столь важной и интересной задачи, как аналитическое продолжение трехмерных аномальных полей в криволинейные области. Действительно, пусть значения аномального гравитационного поля V_z заданы на плоскости $x_3 = 0$ и требуется аналитически продолжить это поле в нижнее полупространство на криволинейную поверхность S (см. условия § 2). Вычислим на плоскости наблюдения величину составляющих V_y и V_x (это можно выполнить по известным соотношениям [5]). Вводя обозначения

$$g_{,1} = V_x, \quad g_{,2} = V_y, \quad g_{,3} = V_z,$$

рассмотрим выражение (6) как интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_{,\beta}(y)$. Решая это уравнение, можно получить значения аномальных полей на поверхности S.

В работе рассмотрены лишь некоторые приложения «приведенной» теории Моисила — Теодореску к интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Однако круг задач, которые могут быть решены с помощью указанной теории, чрезвычайно широк и охватывает не только вопросы аналитического продолжения аномальных полей, но и целый ряд других проблем, таких как связь особых точек аномальных полей с геометрией возмущающих тел, задача вычисления гармонических моментов наблюденных аномалий и пр. Таким образом, рассмотренный математический аппарат в принципе позволяет перенести на трехмерный случай широкий круг результатов, полученных для двухмерных потенциальных полей.

В заключение необходимо добавить, что развитый в работе аппарат оказывается удобным орудием исследования не только потенциальных полей, но и полей, удовлетворяющих волновому уравнению и уравнению Гельмгольца (полей упругих волн и переменных электромагнитных полей). Это дает возможность конструировать методы расчета пространственного распределения указанных геофизических полей по аналогии с соответствующими методами аналитического продолжения потенциальных полей.

Московский
институт нефтехимической и газовой
промышленности
им. И. М. Губкина

Поступила
11 II 1970

Литература

1. Бицадзе А. Б. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. «Наука», М., 1969.
2. Молоденский М. С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 3, 1948.
3. Сергеев В. О. Пересчет в верхнее полупространство аномалии вертикальной составляющей магнитного поля, заданной на сложном рельефе. Сб. «Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных». «Наука», М., 1967.
4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, 1957.
5. Гладкий К. В. Гравиразведка и магниторазведка. «Недра», М., 1967.
6. Serson P. N., Mach S. Z., Whitham K. A three-component airborne magnetometer. Canada department of mines and technical surveys. Dominion observatories. 1957.