АКАДЕМИЯ НАУК СССР

# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

# ФИЗИКА ЗЕМЛИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

9

МОСКВА · 1974

ФИЗИКА
ЗЕМЛИ
№ 9 · 1974

УДК 550.831

*М. С. ЖДАНОВ*

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ АНОМАЛИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ТРЕХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ

На основе аппарата обобщенных интегралов типа Коши для гармонических функций трех переменных рассмотрены вопросы интерпретации гравитационных аномалий, зависящих от трех пространственных координат. Получены представления производных гравитационного потенциала в виде трехмерных аналогов интегралов типа Коши. Исследован вопрос о связи особых точек гармонически продолженных производных потенциала с формой поверхности возмущающих тел и выяснена возможность использования продолженных значений потенциальных полей для определения формы этой поверхности в целом.

В последние годы теория интерпретации гравитационных аномалий развивалась в основном в рамках теории плоских (двумерных) полей, обусловленных вытянутыми вдоль некоторой горизонтальной оси возмущающими телами, ограниченными цилиндрическими поверхностями. Однако плоские (двумерные) поля могут служить лишь грубой моделью реальных, зависящих от трех пространственных координат гравитационных полей, наблюдаемых на поверхности Земли, поэтому и математическая теория интерпретации плоских полей может быть использована на практике с большой осторожностью при условии соблюдения соответствующих критериев двумерности поля.

В настоящее время назрела необходимость создания теории интерпретации трехмерных гравитационных аномалий, развивающей существующую теорию интерпретации двумерных потенциальных полей. Некоторые аспекты указанной проблемы рассматривались автором в работе [1]. Настоящая статья посвящена дальнейшему развитию теории интерпретации трехмерных потенциальных полей и прежде всего вопросам анализа гармонически продолженных значений гравитационных аномалий.

В первом параграфе для гармонических функций трех переменных разрабатывается аппарат, адекватный аппарату интеграла Коши в теории функций комплексного переменного. Во втором параграфе получены новые представления внешнего и внутреннего гравитационных потенциалов однородных возмущающих тел в виде трехмерных аналогов интегралов типа Коши, обобщающие на трехмерный случай известные формулы А. В. Цирульского [2] для плоских полей. В третьем и четвертом параграфах рассматривается вопрос о связи особых точек гармонически продолженных производных потенциала с формой поверхности возмущающих тел и выясняется возможность использования продолженных значений потенциальных полей для определения формы этой поверхности в целом.

## § 1. АНАЛОГИ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ СВОЙСТВА

Одним из основных орудий исследования плоских потенциальных полей является теория интеграла Коши. В настоящем параграфе вводится понятие аналога интеграла типа Коши для гармонических функций трех переменных и изучаются его свойства.

Для сокращения записи воспользуемся аппаратом тензорного анализа в трехмерном эвклидовом пространстве $E_3$ [3], причем ограничимся рассмотрением исключительно прямоугольных декартовых систем координат, получающихся из данной системы $X_1, X_2, X_3$ вращением.

Фундаментальное значение для всей излагаемой ниже теории имеет следующий четырехвалентный тензор:

$$\Delta_\alpha{}^\beta|^{kl}=\delta_\alpha{}^\beta\cdot\delta_k{}^l+\delta_\alpha{}^k\cdot\delta_\beta{}^l-\delta_k{}^\beta\cdot\delta_\alpha{}^l; \qquad (1)$$

$$\alpha,\ \beta,\ k,\ l=1,\ 2,\ 3$$

где $\delta_i{}^j$ — символы Кронекера, определяемые как

$$\delta_i{}^j=\begin{cases}1; & i=j\\ 0; & i\neq j.\end{cases}$$

В силу известных свойств символов Кронекера [4], тензор $\Delta_\alpha{}^\beta|^{kl}$ является изотропным, т. е. имеет одинаковые компоненты во всех вращающихся системах кординат. Явный вид матрицы компонент тензора $\Delta_\alpha{}^\beta|^{kl}$ приведен в работе [1].

Свертывая тензор $\Delta_\alpha{}^\beta|^{kl}$ с градиентом фундаментального решения уравнения Лапласа $1/|x-y|$ (где $x$ и $y$ — произвольные точки в $E_3$), образуем присоединенный тензор Грина для уравнения Лапласа:

$$G_\alpha{}^{\beta l}(x,y)=\Delta_\alpha{}^\beta|^{kl}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)=\Delta_\alpha{}^\beta|^{kl}\frac{x_k-y_k}{|x-y|^3}. \qquad (2)*$$

Пусть теперь в некоторой области $\Omega$ трехмерного пространства $E_3$ задана непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(y)$. Рассмотрим произвольную кусочно-гладкую ориентированную поверхность $S\subset\Omega$ и вычислим интеграл

$$q_\alpha(x)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S G_\alpha{}^{\beta l}(x,y)\varphi_{,\beta}(y)\nu_l\cdot dS_y;\quad x\notin S\qquad (\alpha,\beta,l=1,2,3), \qquad (3)$$

где $\varphi_\beta(y)=\partial\varphi(y)/\partial y_\beta$, а $\mathbf{v}=(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $S$ в точке $y$. Интеграл (3) можно интерпретировать как поток некоторого аффинорного поля $\mathfrak{A}_\alpha{}^l=-\dfrac{1}{4\pi}G_\alpha{}^{\beta l}\varphi_{,\beta}$ через поверхность $S$ [3]. Вектор $\mathrm{Q}=(q_1,\ q_2,\ q_3)$, описывающий этот поток, по построению зависит от координат точки $x$ и, следовательно, образует векторное поле, причем компоненты этого векторного поля являются, очевидно, аналитическими функциями всюду вне поверхности $S$. Если же поверхность $S$ замкнутая, то можно показать, что ротор и дивергенция вектора $\mathrm{Q}(x)$ равны нулю, т. е.

$$\begin{gathered}q_{\alpha,\beta}(x)\equiv q_{\beta,\alpha}(x);\\ x\notin S;\\ q_{1,1}(x)+q_{2,2}(x)+q_{3,3}(x)\equiv 0.\end{gathered} \qquad (4)$$

---

* В выражении (2), как и всюду ниже, используется правило суммирования по повторяющимся индексам.

где, в соответствии с общепринятыми в тензорном анализе обозначениями, индекс, отделенный запятой, обозначает дифференцирование по соответствующей кординате. Следовательно, компоненты вектора $Q(x)$ можно рассматривать как частные производные некоторой гармонической функции $q(x)$, определенной в любой точке пространства, за исключением точек поверхности $S$, и записать

$$q_\alpha(x) \equiv q_{,\alpha}(x).$$

Интеграл (3), следуя работам [1, 5], будем называть аналогом интеграла типа Коши для гармонических функций трех переменных, а функции $\varphi_{,\beta}(y)$ — его плотностями. Интеграл типа Коши (3) описывает градиенты функций, гармонических во всем пространстве, за исключением точек самой поверхности $S$, которая является для него особой поверхностью. В частном случае, когда $\varphi_{,\beta}(y)$ есть граничные значения на $S$ производных гармонической внутри области $D$, ограниченной поверхностью $S$ функции, выполняется:

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S G_\alpha^{\beta l}(x, y)\,\varphi_{,\beta}(y)\,\nu_l\,dS_y = \begin{cases} 0; & x \in CD; \\ \varphi_{,\alpha}(x); & x \in D. \end{cases} \tag{5}$$

($CD$ — бесконечная область, дополняющая область $D$ до всего пространства $E_3$), т. е. интеграл типа Коши (3) решает краевую задачу для гармонических функций трех переменных [1].

Трехмерный аналог интеграла типа Коши в тех случаях, когда точка $x_0$ лежит на поверхности $S$, не имеет смысла, однако, воспользовавшись известными приемами [5], можно вычислить сингулярный интеграл в смысле главного значения по Коши:

$$q_{,\alpha}(x_0) = \lim_{\rho\to 0}\left\{-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_\rho} G_\alpha^{\beta l}(x, y)\,\varphi_{,\beta}(y)\,\nu_l\,dS_y\right\}; \quad x_0 \in S, \tag{6}$$

где $S_\rho$ — часть поверхности $S$ вне сферы $C_\rho$ радиуса $\rho$ с центром в $x_0$. Расчетные формулы при этом зависят от типа точки $x_0 \in S$, в которой вычисляется сингулярный интеграл.

В дальнейшем всюду в данной работе будем предполагать, что гомеоморфная сфере поверхность $S$ представляет собой объединение конечного числа гладких в смысле Ляпунова кусков $\Gamma_i$, $i=1, 2, \ldots, N$, ограниченных замкнутыми контурами $\gamma_i$ соответственно: $S = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Gamma_i$. Тогда все точки, принадлежащие внутренностям $\Gamma_i$, являются, очевидно, обыкновенными точками поверхности $S$, т. е. в этих точках существуют касательные плоскости к поверхности. Точки же, принадлежащие контурам $\gamma_i$, могут оказаться особыми точками поверхности $S$, т. е. в этих точках поверхность $S$ может не иметь касательных плоскостей.

Рассмотрим какую-либо особую точку поверхности $S$, являющуюся точкой соприкосновения гладких по Ляпунову кусков $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \Gamma_{j_3}, \ldots, \Gamma_{j_m}$. В пределах каждого куска $\Gamma_{j_i}$ можно провести отрезки гладких кривых, лежащих на $S$ и заканчивающихся в точке $x_0$. Построив в точке $x_0$ односторонние касательные ко всем проведенным отрезкам гладких кривых, получим коническую поверхность с вершиной в точке $x_0$. Обозначим через $\theta(x_0)$ величину телесного угла (в стерадианах), образованного построенной конической поверхностью. Особая точка $x_0$ является угловой точкой, если угол $\theta(x_0)$ отличен от 0 и $4\pi$ ср. Особая точка $x_0$ является точкой возврата, если угол $\theta(x_0)$ равен нулю либо $4\pi$ ср. *. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением только двух перечисленных выше типов особых точек. Отме-

* Если $x_0$ — обыкновенная точка, то $\theta(x_0) = 2\pi$ ср.

тим, что совокупность угловых точек и точек возврата могут образовывать на поверхности $S$ угловые линии и ребра возврата соответственно.

Вернемся теперь к проблеме вычисления сингулярного интеграла (6). Следуя [5], представим выражение (6) в виде:

$$q_{,\alpha}(x_0)=-\frac{1}{4\pi}\lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{S_\rho} G_\alpha{}^{\beta l}(x_0,y)\,[\varphi_{,\beta}(y)-\varphi_{,\beta}(x_0)]\,\nu_l\,dS_y+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{\sigma_\rho} G_\alpha{}^{\beta l}(x_0,y)\,\varphi_{,\beta}(x_0)\,\nu_l\,dS_y, \qquad (7)$$

где $\sigma_\rho$ — часть сферы $C_\rho$, лежащая внутри $D$. Первый предел в (7) существует при условии, что плотности интеграла типа Коши $\varphi_{,\beta}(y)$ удовлетворяют на $S$ условию Гёльдера. Действительно, в этом случае, если $x_0$ принадлежит внутренности $\Gamma_i$, то первый предел существует как обыкновенный несобственный интеграл:

$$-\frac{1}{4\pi}\lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{S_\rho} G_\alpha{}^{\beta l}(x_0,y)\,[\varphi_{,\beta}(y)-\varphi_{,\beta}(x_0)]\,\nu_l\,dS_y=$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} G_\alpha{}^{\beta l}(x_0,y)\,[\varphi_{,\beta}(y)-\varphi_{,\beta}(x_0)]\,\nu_l\,dS_y. \qquad (8)$$

Если же $x_0$ является точкой соприкосновения гладких кусков $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \ldots$ $\ldots, \Gamma_{j_m}$, то, разбивая интеграл под знаком предела на $m$ интегралов по различным гладким кускам $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \ldots, \Gamma_{j_m}$ и учитывая условие Гёльдера, вычисляем, аналогично тому, как это делается в двумерном случае [6], $m$ обыкновенных несобственных интегралов, которые в сумме вновь дают соотношение (8).

Вычислим теперь второй предел в (7):

$$\frac{1}{4\pi}\lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{\sigma_\rho} G_\alpha{}^{\beta l}(x_0,y)\,\varphi_{,\beta}(x_0)\,\nu_l\,dS_y=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{\sigma_\rho}\Delta_\alpha{}^{\beta}|^{kl}\varphi_{,\beta}(x_0)\frac{x_k-y_k}{|x-y|^3}\cdot\frac{x_l-y_l}{|x-y|}dS_y=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\lim\frac{\rho^2}{\rho^4}\varphi_{,\alpha}(x_0)\iint\limits_{\sigma_\rho}dS_y=\frac{1}{4\pi}\varphi_{,\alpha}(x_0)\cdot\theta(x_0), \qquad (9)$$

где $\theta(x_0)$ — соответствующий телесный угол в точке $x_0$. Подставляя (9) и (8) в (7), окончательно получаем

$$q_{,\alpha}(x_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} G_\alpha{}^{\beta l}(x_0,y)\,[\varphi_{,\beta}(y)-\varphi_{,\beta}(x_0)]\,\nu_l\,dS_y+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\varphi_{,\alpha}(x_0)\cdot\theta(x_0). \qquad (10)$$

Формула (10) позволяет вычислить значение сингулярного интеграла типа Коши в любой точке поверхности $S$.

Как уже отмечалось ранее, для гармонической функции $q(x)$, частные производные которой определяются интегралом типа Коши, сама поверхность интегрирования $S$ является особой поверхностью. Рассмотрим теперь важный для приложений вопрос о поведении трехмерных аналогов интегра-

Следовательно

$$W_{,\alpha}(x)=-\frac{4\pi}{3}f\sigma x_\alpha-\overset{R}{V}_{,\alpha}(x);\quad x\in D. \tag{26}$$

Для функций $V_{,\alpha}{}^R(x)$ можно воспользоваться представлением, аналогичным (22)

$$\overset{R}{V}_{,\alpha}(x)=\frac{f\sigma}{3}\iint\limits_S G_\alpha{}^{\beta l}(x,y)\,y_\beta\nu_l\,dS_y-$$

$$-\frac{f\sigma}{3}\iint\limits_{C_R} G_\alpha{}^{\beta l}(x,y)\,y_\beta\tilde{\nu}_l\,dS_y, \tag{27}$$

где $\tilde{\nu}_l$ — единичный вектор внешней нормали к сфере $C_R$. Вычислим второй интеграл в (27)

$$-\frac{f\sigma}{3}\iint\limits_{C_R} G_\alpha{}^{\beta l}(x,y)\,y_\beta\tilde{\nu}_l\,dS_y=$$

$$=-\frac{f\sigma}{3}\iint\limits_{C_R}\Delta_\alpha{}^{\beta|kl}\frac{x_k-y_k}{|x-y|^3}\,y_\beta\frac{y_l}{|y|}\,dS_y=$$

$$=-R\frac{f\sigma}{3}\iint\limits_{C_R}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)dS_y=-\frac{R}{3}F_{,\alpha}(x). \tag{28}$$

Выражение $F_{,\alpha}(x)$ описывает производные гравитационного потенциала однородного сферического слоя, которые, как известно, внутри сферического слоя равны нулю. Поэтому второй интеграл в (27) пропадает и мы имеем

$$\overset{R}{V}_{,\kappa}(x)=\frac{f\sigma}{3}\iint\limits_S G_\alpha{}^{\beta l}(x,y)\,y_\beta\nu_l\,dS_y. \tag{29}$$

Как видно из (29), $V_{,\alpha}{}^R(x)$ не зависит от $R$, поэтому индекс $R$ можно опустить и функцию $V(x)=V^R(x)$ интерпретировать как гравитационный потенциал области $CD$, заполненной массами плотности $\sigma$. Объединяя (22) и (29), имеем

$$-\frac{f\sigma}{3}\iint\limits_S G_\alpha{}^{\beta l}(x,y)\,y_\beta\nu_l\,dS_y=\begin{cases}U_{,\alpha}(x); & x\in CD;\\ -V_{,\alpha}(x); & x\in D,\end{cases} \tag{30}$$

т. е. трехмерный аналог интеграла типа Коши с плотностями, равными $y_\beta$, вне $D$ имеет смысл гравитационного потенциала области $D$, а внутри $D$ — гравитационного потенциала области $CD$ (с точностью до постоянного множителя $\pm\frac{4\pi}{3}f\sigma$).

Подставляя (29) в (26), имеем

$$W_{,\alpha}(x)=-\frac{4\pi}{3}f\sigma x_\alpha-\frac{f\sigma}{3}\iint\limits_S G_\alpha{}^{\beta l}(x,y)\,y_\beta\nu_l\,dS_y. \tag{31}$$

Воспользовавшись свойством (5), представления (22) и (31) можно объединить в виде

$$-\frac{f\sigma}{3}\iint\limits_S G_\alpha{}^{\beta l}(x,y)\,[y_\beta-x_\beta]\nu_l\,dS_y=\begin{cases}U_{,\alpha}(x); & x\in CD;\\ W_{,\alpha}(x); & x\in D.\end{cases} \tag{32}$$

Полученные представления (30) и (32) могут быть использованы для практических расчетов при решении прямой задачи гравиметрии, однако основное значение эти представления имеют в теоретическом плане, поскольку поверхностные интегралы, фигурирующие в них, представляют собой трехмерные аналоги интегралов типа Коши и, следовательно, обладают всеми отмеченными в § 1 свойствами.

## § 3. СВЯЗЬ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕХМЕРНОЙ ОДНОРОДНОЙ ОБЛАСТИ С РАСПОЛОЖЕНИЕМ ОСОБЕННОСТЕЙ ГАРМОНИЧЕСКИ ПРОДОЛЖЕННЫХ ВНУТРЬ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

Вопрос о связи особых точек гармонически (аналитически) продолженных значений гравитационного потенциала с формой поверхности возмущающих тел является одним из центральных вопросов теории интерпретации гравитационных аномалий.

Впервые этот вопрос исследовался в работах Е. Шмидта [8] и Р. Вавра [9], которые показали, что гравитационный потенциал может быть продолжен через поверхность тела внутрь масс, если эта поверхность — аналитическая, и что особенности такого продолжения совпадают с точками смыкания различных кусков поверхностей (дуг), ограничивающих тело (область) и особенностями некоторой вспомогательной функции $\psi$ — аналитического интеграла дифференциального уравнения, рассматриваемого в теореме Коши — Ковалевской. Дальнейшее развитие эти исследования получили в работах А. В. Цирульского [2, 10], Г. Я. Голиздры [11], В. Н. Страхова [7], где было показано, что в случае двумерных (плоских) полей поставленная проблема может быть решена исчерпывающим образом и в то же время достаточно просто путем использования аппарата теории функций комплексного переменного и прежде всего интеграла Коши.

В настоящем параграфе мы увидим, что и в трехмерном случае указанный вопрос может быть разрешен с не меньшей полнотой и легкостью благодаря использованию развитого выше аппарата трехмерных аналогов интегралов типа Коши.

Согласно формуле (30), интеграл $-\frac{f\sigma}{3}\iint\limits_S G_\alpha^{\beta l}(x, y)\, y_\beta \nu_l\, dS_y$ имеет вне $D$ смысл гравитационного потенциала области $D$, а внутри $D$ — гравитационного потенциала (со знаком минус) области $CD$, заполненных массами постоянной плотности $\sigma$. Разность предельных значений интеграла (30) на поверхности $S$ при подходе к этой поверхности изнутри и извне области $D$ определяется, согласно формулам Сохоцкого — Племеля (14):

$$U_{,\alpha}(x_0)+V_{,\alpha}(x_0)=-\frac{4\pi}{3} f\sigma x_{0_\alpha}, \tag{33}$$

где $x_0=(x_{0_1}, x_{0_2}, x_{0_3})\in S$; $\alpha=1, 2, 3$.

Введем следующие определения. Будем говорить, что некоторый кусок $\Gamma$ поверхности $S$ имеет *гармоническую внутреннюю сторону*, если в области $D^+\subset D$, примыкающей к поверхности $\Gamma$, существует гармоническая функция $\Phi^{+\Gamma}(x)$ такая, что

$$\Phi_{,\alpha}^{+\Gamma}(x_0)=x_{0\alpha} \quad \text{при } x_0\in\Gamma. \tag{34}$$

Аналогично будем говорить, что поверхность $\Gamma$ имеет *гармоническую внешнюю сторону*, если в некоторой области $D^-\subset CD$, примыкающей к поверхности $\Gamma$, существует гармоническая функция $\Phi^{-\Gamma}(x)$ такая, что

$$\Phi_{,\alpha}^{\Gamma}(x_0)=x_{0\alpha} \quad \text{при } x_0\in\Gamma. \tag{35}$$

Если поверхность Γ имеет гармонические внешнюю и внутреннюю стороны, то будем говорить, что Γ есть **гармоническая поверхность**, при этом уравнение такой поверхности принимает вид:

$$\Phi_{,\alpha}{}^{\Gamma}(x)=x_{0\alpha} \quad \text{при } x_0\in\Gamma, \tag{36}$$

где $\Phi_{,\alpha}{}^{\Gamma}(x)\equiv\Phi_{,\alpha}{}^{+\Gamma}(x)\equiv\Phi_{,\alpha}{}^{-\Gamma}(x)$.

Очевидно, что всякая гармоническая поверхность является аналитической поверхностью. При помощи теоремы Коши — Ковалевской можно показать обратное: всякая аналитическая поверхность Γ является гармонической, т. е. в окрестности Γ существует такая гармоническая функция $\Phi^{\Gamma}(x)$, что на Γ выполнено $x_\alpha=\Phi_{,\alpha}{}^{\Gamma}(x)$. Следовательно, понятие гармонической поверхности совпадает с понятием аналитической поверхности. В дальнейшем уравнения типа (34)—(36) будем называть уравнениями поверхности Γ (или ее внутренней и внешней сторон) в гармонической форме.

В частном случае, если аналитическая поверхность Γ представляет собой цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси $X_2$, то из (36) можно получить уравнение проекции $L$ поверхности Γ на плоскость $X_1OX_3$, проходящую через оси $X_1$ и $X_3$:

$$\Phi_{,1}(x_1, 0, x_3)=x_1; \quad \Phi_{,3}(x_1, 0, x_3)=x_3. \tag{37}$$

Если ввести на плоскости $X_1OX_3$ комплексную переменную $\sigma=x_1+ix_3$ и обозначить $\Phi_{,1}(x_1, 0, x_3)=\Psi(x_1, x_3)$, $\Phi_{,3}(x_1, 0, x_3)=-\varphi(x_1, x_3)$, то соотношение (37) в комплексной форме принимает вид

$$x_1-ix_3=\psi(x_1, x_3)+i\varphi(x_1, x_3). \tag{38}$$

Легко убедиться, что в силу гармоничности функции $\Phi(x)$ функции ψ и φ удовлетворяют условиям Коши — Римана

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_3}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \tag{39}$$

следовательно, функция $\chi(\sigma)=\psi(x_1, x_3)+i\varphi(x_1, x_3)$, стоящая в правой части (38), является комплексно-аналитической и равенство (38) записывается окончательно

$$\bar{\sigma}=\chi(\sigma), \tag{40}$$

где «черта» над σ означает взятие сопряженной величины. Выражение (40) есть уравнение плоской кривой в форме А. В. Цирульского [2]. Таким образом, в случае двумерных возмущающих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями, уравнения этих поверхностей в гармонической форме (36) переходят в уравнения контуров поперечного сечения возмущающих тел в форме А. В. Цирульского (40). Выявленная взаимосвязь между уравнениями (36) и (40) позволяет непосредственно переносить результаты, полученные для трехмерных полей, на двумерный случай.

Предположим теперь, что производные гравитационного потенциала $U_{,\alpha}(x)$ области $D$ заданы в некоторой области $\Omega^-\subset CD$ или на некоторой поверхности $\Sigma\subset CD$, проходящей через бесконечную удаленную точку. Как известно, функции $U_{,\alpha}(x)$ можно гармонически продолжить во все точки области $CD$, поскольку они там гармоничны [1, 12]. Выясним, при каких условиях внешний гравитационный потенциал может быть продолжен внутрь области $D$, т. е. **внутрь масс**, и где находятся особенности такого предложения.

**Утверждение 1.** Функция $U(x)$ $(V(x))$ может быть гармонически продолжена внутрь (во вне) области $D$ через любую точку некоторой поверхности $\Gamma\subset S$, за исключением, быть может, контура γ, ее ограничивающего, в том и только том случае, когда поверхность Γ имеет гармоническую внутреннюю (внешнюю) сторону.

**Доказательство**

Предположим первоначально, что поверхность $\Gamma$ имеет гармоническую внутреннюю сторону, тогда, подставляя (34) в (33), имеем

$$U_{,\alpha}(x_0)+V_{,\alpha}(x_0)=-\frac{4\pi}{3}f\sigma\Phi_{,\alpha}^{+\Gamma}(x_0); \tag{41}$$

откуда

$$U_{,\alpha}(x_0)=-\frac{4\pi}{3}f\sigma\Phi_{,\alpha}^{+\Gamma}(x_0)-V_{,\alpha}(x_0), \tag{42}$$

где $x_0$ — произвольная внутренняя точка поверхности $\Gamma$.

Поскольку функции, стоящие в правой части (42), допускают гармоническое продолжение внутрь $D$, то и $U_{,\alpha}(x_0)$ может быть гармонически продолжена внутрь $D$:

$$U_{,\alpha}(x)=-\frac{4\pi}{3}f\sigma\Phi_{,\alpha}^{+\Gamma}(x)-V_{,\alpha}(x);\quad x\in D^+. \tag{43}$$

Интегрируя (43), получаем

$$U(x)=-\frac{4\pi}{3}f\sigma\Phi^{+\Gamma}(x)-V(x), \tag{44}$$

где произвольная константа, появляющаяся при интегрировании, введена в функцию $\Phi^{+\Gamma}(x)$.

Если теперь предположить, напротив, что функция $U(x)$ может быть гармонически продолжена в некоторую области $D^+\subset D$, примыкающую к $\Gamma$, через любую точку поверхности $\Gamma$ (за исключением, быть может, контура $\gamma$), то, вводя обозначения

$$\Phi_{,\alpha}^{+\Gamma}(x)=-\frac{3}{4\pi f\sigma}\cdot(U_{,\alpha}(x)+V_{,\alpha}(x));\quad x\in D^+,$$

получаем (на основании (33)):

$$\Phi_{,\alpha}^{+\Gamma}(x_0)=x_{0_\alpha};\qquad x_0\in\Gamma,$$

откуда следует, что поверхность $\Gamma$ имеет гармоническую внутреннюю сторону.

Аналогично проводится доказательство для функции $V(x)$, причем гармоническое продолжение этой функции в $CD$ определяется формулой

$$V(x)=-\frac{4\pi}{3}f\sigma\Phi^{-\Gamma}(x)-U(x). \tag{45}$$

Из соотношений (44), (45) следует, что множество особых точек, гармонически продолженных через поверхность $\Gamma$ полей, совпадает со множеством особенностей функции $\Phi^{+\Gamma}(x)$ внутри $D$ и функции $\Phi^{-\Gamma}(x)$ вне $D$ соответственно.

Сравнивая формулы (43) и (26), видим, что аналитическое продолжение производных внешнего гравитационного потенциала внутрь масс отличается от значений производных внутреннего потенциала на величину, равную

$$\frac{4\pi}{3}f\sigma[x_\alpha-\Phi_{,\alpha}^{+\Gamma}(x)].$$

Выясним теперь, какие точки на поверхности возмущающего тела являются особыми для гармонически продолженных потенциальных полей.

Пусть гладкие по Ляпунову куски $\Gamma_i$, составляющие поверхность $S$, имеют гармонические внутренние стороны и уравнения этих сторон в гармонической форме имеют вид:

$$\Phi^{+\Gamma_i}_{,\alpha}(x)=x_\alpha; \quad x_\alpha\in\Gamma_i; \quad i=1,2,\ldots,N,$$

причем

$$\Phi^{+\Gamma_i}\neq\Phi^{\Gamma_j} \quad \text{при} \quad i\neq j. \tag{46}$$

Предположим, что контуры $\gamma_i$ и $\gamma_{i+1}$, ограничивающие поверхности $\Gamma_i$ и $\Gamma_{i+1}$, совпадают по некоторому отрезку $\gamma_{i,\,i+1}$. Этот отрезок будем называть линией смыкания двух поверхностей $\Gamma_i$ и $\Gamma_{i+1}$. Покажем, что линии смыкания поверхностей являются линиями ветвления для потенциала и его производных.

Действительно, гармонически продолжая $U$ через поверхность $\Gamma_i$, находим в силу (44)

$$U^{(i)}(x)=-\frac{4\pi}{3}f\sigma\Phi^{+\Gamma_i}(x)-V(x), \tag{47}$$

а продолжая $U$ через $\Gamma_{i+1}$, определяем:

$$U^{(i+1)}(x)=-\frac{4\pi}{3}f\sigma\Phi^{+\Gamma_{i+1}}(x)-V(x). \tag{48}$$

В силу условия (46) $U^{(i)}(x)\neq U^{(i+1)}(x)$, следовательно, $\gamma_{i,\,i+1}$ есть линия ветвления потенциала.

Таким образом мы доказали следующее

**Утверждение 2.** Линии смыкания различных гармонических (аналитических) кусков поверхности $S$, ограничивающей область $D$, являются линиями ветвления для гармонически продолженных внутрь $D$ значений внешнего гравитационного потенциала области $D$, заполненной массами постоянной плотности $\sigma$.

Необходимо отметить, что на поверхности возмущающего тела могут лежать не только особые линии потенциальных полей, но и особые точки.

**Утверждение 3.** Всякая точка поверхности $S$, ограничивающей область $D$, заполненную возмущающими массами постоянной плотности $\sigma$, особая в дифференциально-геометрическом смысле (угловая точка или точка возврата), является особой и для аналитического продолжения соответствующих потенциальных полей (либо для поля $U$, либо для поля $V$, либо для обоих полей $U$ и $V$).

Впервые утверждение 3 было сформулировано в работах [13, 14], однако, в последних приведены доказательства только для некоторых частных типов особых точек поверхностей. Ниже дано полное доказательство утверждения 3.

Важное значение для понимания роли геометрических особых точек поверхности возмущающих тел при интерпретации гравитационных аномалий имеют, в частности, следующие положения, вытекающие из результатов работ [13, 14]: а) если точка $A$ является угловой точкой поверхности (контура) тела, то она представляет собой особенность для аналитического продолжения функций, описывающих поля как внутренних, так и внешних масс; б) если же точка $A$ — особая точка типа «острия» (точка возврата), то эта точка является особой либо для поля $U$, либо для поля $V$ в зависимости от типа «острия» и его направления. Для геофизических приложений наибольшее значение имеют угловые точки, которые всегда являются особыми для обоих полей $U$ и $V$. Особенности типа «острия» с точки зрения практики представляют собой «экзотический» математический пример.

Прежде чем переходить к доказательству утверждения 3, необходимо сделать следующее отступление. В 5-м номере журнала «Физика Земли» за 1973 год опубликована статья В. Н. Страхова, [15], в которой «устанавливается ошибочность утверждения М. С. Жданова [13] о том, что особая в дифференциально-геометрическом смысле точка границы области является особой и для комплексной напряженности внешнего поля». Это замечание В. Н. Страхова, по-видимому, основано на недоразумении. Ни в одной из своих работ я не утверждал, что любая точка, особая в дифференциально-геометрическом смысле, является особой и для напряженности **внешнего поля**. В работе [13], на которую ссылается В. Н. Страхов, говорится о том, что «всякая точка контура поперечного сечения возмущающего тела, особая в геометрическом смысле, является особой и для соответствующих потенциальных функций в теоретико-аналитическом смысле». Здесь, так же как и в настоящей статье, под соответствующими понимаются функции, которые в зависимости от условия задачи описывают потенциальные поля либо внутренних (поле $U$), либо внешних (поле $V$) масс. В примере, приводимом В. Н. Страховым [15] в качестве доказательства «ошибочности» основного утверждения работы [13], такой соответствующей функцией является гравитационное поле $V$ внешних масс. Действительно, комплексная напряженность $V_k$ гравитационного поля масс, расположенных во вне области, ограниченной подерой эллипса, вычисляется по формуле:

$$V_k(s)=2\pi f\varphi(s)-2if\left\{\frac{m_1}{c-s}+\frac{m_2}{c+s}\right\},$$

где использованы обозначения работы [15]. Поскольку согласно [15] функция $\varphi(s)$ имеет в вершине «острия» на контуре тела (точке $s=\sigma_3=-a$) особенность — точку ветвления, то эта геометрическая особая точка кривой, в полном соответствии с основным утверждением работы [13] и утверждением 3 настоящей статьи, является особой точкой и для аналитического продолжения функции $V_k(s)$.

Таким образом, пример В. Н. Страхова ни в коей мере не противоречит работе [13] утверждению 3. В остальном же я очень признателен В. Н. Страхову за постоянное внимание к моим работам.

**Доказательство утверждения 3.**

Предположим противоположное утверждению 3, т. е. предположим, что точка $x_0\in S$ — особая в дифференциально-геометрическом смысле точка поверхности, и в то же время функции $U$ и $V$ могут быть гармонически продолжены через любую точку поверхности $S$, принадлежащую некоторой окрестности точки $x_0$, в том числе через саму $x_0$. Обозначим часть поверхности $S$, принадлежащую указанной окрестности точки $x_0$, через $\Gamma_0$, тогда, согласно утверждению 1, $\Gamma_0$ есть гармоническая (аналитическая) поверхность и ее уравнение в гармонической форме имеет вид:

$$\Phi_{,\alpha}(x)-x_\alpha=P_\alpha(x)=0;\quad x\in\Gamma_0;\quad \alpha=1,2,3. \tag{49}$$

Поскольку $x_0$ — геометрически особая точка поверхности $S$, то [16]:

$$P_{\alpha,\beta}(x_0)=0;\quad \alpha,\beta=1,2,3. \tag{50}$$

Из (50), в частности, следует

$$\Phi_{,11}-1=0;\ \Phi_{,22}-1=0,\ \Phi_{,33}-1=0\ \text{ при } x=x_0. \tag{51}$$

Суммируя, получаем

$$\Delta\Phi\,|_{x=x_0}=3. \tag{52}$$

Откуда в силу гармоничности функции $\Phi(x)$ находим $0=3$.

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения 3.

В заключение настоящего параграфа отметим, что все полученные выше результаты на основе выявленной взаимосвязи между уравнениями поверхностей $\Gamma$ в гармонической форме (36) и уравнениями линий их поперечного сечения $L$ в форме А. В. Цирульского (40) немедленно переносятся со случая трехмерных полей на двумерный (плоский) случай. При этом аналитические поверхности переходят в аналитические дуги, линии смыкания различных аналитических (гармонических) кусков превращаются в точки смыкания соответствующих дуг, угловые линии и ребра возврата переходят в угловые точки и точки возврата, а особые линии трехмерного поля редуцируются соответственно в особые точки плоского поля. Таким образом, на основе утверждений 1, 2, 3 мы в двумерном случае приходим к тем же результатам, которые были получены ранее в работах [2, 7, 10, 11, 13].

## § 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

Результаты предыдущего параграфа позволяют подойти к решению проблемы определения формы поверхности возмущающих масс известной однородной плотности $\sigma$.

Прежде всего, нетрудно убедиться в том, что поставленная задача может быть решена однозначно, если известны внешний гравитационный потенциал $U$ в некоторой области $\Omega^- \subset CD$ и внутренний потенциал $W$ в некоторой области $\Omega^+ \subset D$. Действительно, в этом случае при помощи операции гармонического (аналитического) продолжения можно в соответствии с утверждением 2 определить все линии смыкания различных гармонических кусков поверхности $S$ друг с другом, т. е. определить все контуры $\gamma_i$, ограничивающие поверхности $\Gamma_i$ соответственно. Таким образом, можно построить «пространственный каркас», на который «натянута» искомая поверхность $S$. Далее при помощи формул (24), (25) можно по внутреннему потенциалу $W$ вычислить функцию $V$, определяющую гравитационный потенциал области $CD$, заполненной массами плотности $\sigma$. После этого функции $\Phi^i(x)$, задающие уравнения гармонических кусков $\Gamma_i$, в принципе определяются однозначно, поскольку, согласно утверждению 1 и формулам (44), (45), множества особых точек, гармонически продолженных сквозь контуры $\gamma_i$ полей $U$ и $V$, совпадают со множествами особенностей функций $\Phi^{(i)}(x)$ внутри $D$ и вне $D$ соответственно.

Если обозначить через $U^{(i)}(x)$ и $V^{(i)}(x)$ результаты гармонического продолжения функций $U$ и $V$ сквозь контуры $\gamma_i$, то на основании (44), (45) функции $\Phi^{(i)}(x)$ могут быть непосредственно вычислены по формулам

$$\Phi^{(i)}(x) = -\frac{U^{(i)}(x)+V^{(i)}(x)}{\frac{4\pi}{3} f\sigma}. \tag{53}$$

Откуда уравнения поверхностей $\Gamma_i$ в гармонической форме принимают вид:

$$x_\alpha = -\frac{U^{(i)}_{,\alpha}(x)+V^{(i)}_{,\alpha}(x)}{\frac{4\pi}{3} f\sigma}; \qquad i=1, 2, \ldots, N. \tag{54}$$

Отметим, что на практике обычно внутренний потенциал $W$ неизвестен, поэтому задача определения формы поверхности $S$ по внешнему потенциалу $U$ в общем случае неоднозначна. Однако, если нам известен хотя бы один гармонический кусок поверхности $S$, то задача нахождения всей поверхности $S$ по внешнему потенциалу вновь становится однозначной.

В самом деле, пусть известна функция $\Phi^{(1)}(x)$, описывающая гармонический кусок $\Gamma_1$, тогда в соответствии с (44)

$$V(x) = -\frac{4\pi}{3} f\sigma\Phi^{(1)}(x) - U^{(1)}(x) \tag{55}$$

и по (24), (25)

$$W(x) = U^{(1)}(x) + \frac{4\pi}{3} f\sigma \left[ \Phi^{(1)}(x) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right] + 2\pi R^2 f\sigma. \qquad (56)$$

А поскольку мы нашли $W$ и $V$ в некоторой области внутри $D$, то мы находимся уже в условиях задачи, рассмотренной выше, которая имеет единственное решение. Продолжив $U$ внутрь $D$ сквозь контуры $\gamma_i$, определим функции $U^{(i)}(x)$, причем в соответствии с (44), (45):

$$\Phi^{(i)}(x) = -\frac{U^{(i)}(x) + V(x)}{\frac{4\pi}{3} f\sigma}. \qquad (57)$$

Уравнения поверхностей $\Gamma_i$ в гармонической форме с учетом (55), (57) принимают вид

$$x_\alpha = \frac{U^{(1)}_{,\alpha}(x) - U^{(i)}_{,\alpha}(x)}{\frac{4\pi}{3} f\sigma} + \Phi^{(1)}_{,\alpha}(x); \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \qquad (58)$$

Формулы (54) и (58) дают решение задачи об определении формы поверхности $S$, составленной из конечного числа гармонических (аналитических) кусков, при помощи гармонического продолжения гравитационного потенциала.

Изложенный выше метод поиска поверхности $S$ представляет собой обобщение на трехмерный случай соответствующих методов поиска контуров поперечного сечения двумерных возмущающих тел, развитых в работах А. А. Заморева [17], А. В. Цирульского [18] и В. Н. Страхова [19].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведенных в работе исследований позволяют сделать вывод о том, что характер связи формы поверхности трехмерных возмущающих тел с соответствующими потенциальными функциями аналогичен характеру связи контуров поперечного сечения двумерных анамалиеобразующих тел с соответствующими плоскими потенциальными полями. Следовательно, интерпретация продолженных значений трехмерных полей может основываться на тех же принципах, которые используются в плоском случае. Однако расчетные формулы для трехмерных полей, естественно, претерпевают существенные изменения по сравнению с плоским случаем, что необходимо учитывать при обработке гравитационных аномалий, зависящих от трех пространственных координат.

Московский институт нефтехимической
и газовой промышленности
им. И. М. Губкина

Поступила
9.II.1973

### Литература

1. *Жданов М. С.* Развитие теории аналитического продолжения потенциальных полей в криволинейных трехмерных областях. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 2, 1973.
2. *Цирульский А. В.* О некоторых свойствах комплексного логарифмического потенциала однородной области. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 7, 1963.
3. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. «Наука», 1967.
4. *Арфкен Г.* Математические методы в физике. Атомиздат, 1970.
5. *Бицадзе А. Б.* Основы теории аналитиесчких функций комплексного переменного. «Наука», 1969.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. «Наука», 1968.
7. *Страхов В. Н.* Некоторые вопросы плоской задачи гравиметрии. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 12, 1970.
8, *Schmidt E.* Bemerkungen zur Potentialtheorie. Math. Ann., 68, 1909.

9. *Wavre R.* Sur le probléme inverse de la théorie du potential et les Fonction harmoniques multiformes. Comment. math. hel., 6, 1934.
10. *Цирульский А. В., Сиротин М. И.* К вопросу об аналитическом продолжении логарифмического потенциала. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1964.
11. *Голиздра Г. Я.* Особые точки аналитического продолжения гравитационного поля и их связь с формой возмущающих масс. В кн. Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки, Новосибирск, 1966.
12. *Тиман А. Ф., Трофимов В. Н.* Введение в теорию гармонических функций. «Наука», 1968.
13. *Жданов М. С.* О связи особых точек гравитационного и магнитного потенциалов с формой контактной поверхности. Геология и геофизика, № 6, 1970.
14. *Жданов М. С.* О связи геометрических свойств поверхности возмущающих тел с особыми точками гравитационного и магнитного потенциалов. В сб. Полевая геофизика, вып. 95, «Недра», 1971.
15. *Страхов В. Н.* Некоторые примеры эквивалентности и слабой единственности в плоской обратной задаче потенциала. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 5, 1973.
16. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. ГИТТЛ, 1956.
17. *Заморев А. А.* Определение формы тела по производным внешнего гравитационного потенциала. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 1–2, 1942.
18. *Цирульский А. В.* О связи задачи об аналитическом продолжении логарифмического потенциала с проблемой определения границ возмущающей области. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1964.
19. *Страхов В. Н.* Некоторые вопросы плоской обратной задачи магнитного потенциала. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 9, 1970.