АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ

Том XIV

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1974

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ

Том XIV 1974 № 3

УДК 550.384

РАЗДЕЛЕНИЕ АНОМАЛИЙ ПЕРЕМЕННОГО ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ СФЕРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

М. Н. Бердичевский, М. С. Жданов

Метод разделения аномалий переменного геомагнитного поля, разработанный для плоской модели, обобщен на сферическую модель Земли. Показано, что аномалии поля могут быть разделены на поверхностные и глубинные, если известны поверхностная проводимость пленки и нормальный геоэлектрический разрез.

В [1—3] на примере плоской модели Земли рассмотрен вопрос о разделении переменного геомагнитного поля на нормальное и аномальное и выделении аномалий, вызванных поверхностными и глубинными неоднородностями. Предложенные методы нетрудно распространить на сферическую модель Земли.

Сфера радиуса R окружена непроводящей атмосферой и состоит из неоднородной пленки с поверхностной проводимостью $S(\theta, \varphi)$, ограниченной сферами $r=R+0$ и $r=R-0$, и сферически-однородного ядра, содержащего область Q, в которой удельная проводимость меняется по произвольному закону

$$\sigma(q)=\begin{cases}\sigma_n, & q\notin Q,\\ \sigma_n+\Delta\sigma(q), & q\in Q,\end{cases}$$

где $\sigma_n=\sigma_n(r)$ — радиальная функция, определяющая нормальный разрез модели; q — точка наблюдения с координатами (r, θ, φ). Магнитная проницаемость всюду равна $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ *гн/м*. Модель возбуждается сторонними токами с плотностью $\mathbf{j}^P$, сосредоточенными в области P атмосферы.

Зависимость поля от времени выразим множителем $e^{-i\omega t}$. Токами смещения повсюду пренебрегаем.

Электрическое поле в модели удовлетворяет уравнениям

$$\left.\begin{matrix}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}^P\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mu_0\mathbf{H}\end{matrix}\right|_{r\geqslant R+0}, \qquad \left.\begin{matrix}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mu_0\mathbf{H}\end{matrix}\right|_{r\leqslant R-0} \tag{1}$$

и граничным условиям

$$[E_{\varphi,\theta}]_{r=R}=0, \qquad [H_r]_{r=R}=0, \qquad [H_\theta]_{r=R}=E_\varphi|_{r=R}S, \qquad [H_\varphi]_{r=R}=-E_\theta|_{r=R}S.$$

Эта система уравнений и граничных условий эквивалентна системе

$$\left.\begin{matrix}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}^P\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mu_0\mathbf{H}\end{matrix}\right|_{r\geqslant R+0} \qquad \left.\begin{matrix}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\sigma_n\mathbf{E}+\mathbf{j}^Q\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mu_0\mathbf{H}\end{matrix}\right|_{r\leqslant R-0}, \tag{2a}$$

$$[E_{\varphi,\theta}]_{r=R}=0, \qquad [H_r]_{r=R}=0, \qquad [H_\theta]_{r=R}=I_\varphi{}^S, \qquad [H_\varphi]_{r=R}=-I_\theta{}^S, \tag{3a}$$

где $\mathbf{j}^Q$ и $\mathbf{I}^S$ — объемная и поверхностная плотности избыточных токов, распределенных в области Q и оболочке S соответственно

$$\mathbf{j}^Q=\Delta\sigma\mathbf{E}, \qquad I_\varphi{}^S=E_\varphi S, \qquad I_\theta{}^S=E_\theta S. \tag{4}$$

Эта система позволяет перейти от рассматриваемой сферически-неоднородной модели, возбуждаемой током $\mathbf{j}^P$, к эквивалентной сферически-однородной модели, возбуждаемой токами $\mathbf{j}^P$, $\mathbf{j}^Q$, $\mathbf{I}^S$. В соответствии с этим магнитное поле можно представить в виде суммы трех полей

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}^P+\mathbf{H}^Q+\mathbf{H}^S, \tag{5}$$

возбуждаемых токами $\mathbf{j}^P$, $\mathbf{j}^Q$, $\mathbf{I}^S$ соответственно.

Очевидно, что

$$\mathbf{H}^P=\mathbf{H}_n, \quad \mathbf{H}^Q+\mathbf{H}^S=\mathbf{H}_a, \tag{6}$$

где $\mathbf{H}_n$, $\mathbf{H}_a$ — нормальное и аномальное поля.

Задача состоит в том, чтобы разделить поле $\mathbf{H}$, известное при $r=R+0$, на P-, Q- и S-компоненты, т. е. на нормальное поле и аномальные поля, связанные с действием пленки S и неоднородности Q. Эту задачу можно решить, если известны функции $S(\theta, \varphi)$ и $\sigma_n(r)$.

Сначала решим более простую задачу: разделим поле $\mathbf{H}$ на нормальную и аномальную части. Скалярный потенциал магнитного поля U и магнитное поле $\mathbf{H}$ при $r=R+0$ представим, как обычно, в виде рядов [4]

$$U=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} u e^{-im\varphi} P_l^m(\cos\theta),$$

$$H_r=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} h_r e^{-im\varphi} P_l^m(\cos\theta), \tag{7}$$

$$H_\theta=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} h_\theta e^{-im\varphi} \frac{dP_l^m(\cos\theta)}{d\theta},$$

$$H_\varphi=-i\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} h_\varphi m e^{-im\varphi} \frac{P_l^m(\cos\theta)}{\sin\theta},$$

где u, h_r, h_θ, h_φ — коэффициенты Фурье (комплексные амплитуды пространственно-временны́х гармоник магнитного поля и его потенциала). Следуя обычным методам [4], запишем u в виде суммы внешней v и внутренней w частей: $u=v+w$. Как известно,

$$h_r=(l+1)w-lv, \quad h_\theta=h_\varphi=-(v+w). \tag{8}$$

Внешняя часть v принадлежит нормальному полю и легко определяется через h_r и $h_\theta(h_\varphi)$

$$v=v_n=-\frac{(l+1)h_\varphi+h_r}{2l+1}=-\frac{(l+1)h_\theta+h_r}{2l+1}. \tag{9}$$

Внутренняя часть w может быть представлена в виде суммы нормальной и аномальной компонент: $w=w_n+w_a$, при этом

$$w_n=v\frac{l}{l+1}\frac{i\omega\mu_0R+(l+1)Z_n(\omega,l)}{i\omega\mu_0R-lZ_n(\omega,l)}, \tag{10}$$

где Z_n — нормальный импеданс, определяемый по $\sigma_n(r)$.

Таким образом, для коэффициентов Фурье нормального и аномального полей получаем

$$h_{rn}=(l+1)\,w_n-lv_n=-Z_n(\omega,l)\,l\,\frac{(l+1)\,h_\varphi+h_r}{i\omega\mu_0R-lZ_n(\omega,l)},$$

$$h_{\theta n}=h_{\varphi n}=-(v_n+w_n)=\frac{i\omega\mu_0R[\,(l+1)\,h_\varphi+h_r\,]}{(l+1)\,[\,i\omega\mu_0R-lZ_n(\omega,l)\,]},\tag{11}$$

$$h_{ra}=h_r-h_{rn}=\frac{i\omega\mu_0Rh_r+(l+1)\,Z_n(\omega,l)\,lh_\varphi}{i\omega\mu_0R-lZ_n(\omega,l)},$$

$$h_{\theta a}=h_{\varphi a}=h_\theta-h_{\theta n}=h_\varphi-h_{\varphi n}=-\frac{i\omega\mu_0Rh_r+(l+1)\,lZ_n(\omega,l)\,h_\varphi}{(l+1)\,[\,i\omega\mu_0R-lZ_n(\omega,l)\,]}.\tag{12}$$

Теперь путем синтеза сферических гармоник можно определить нормальную и аномальную части поля $\mathbf{H}$ на земной поверхности. Перейдем к следующей задаче. Разделим аномальное поле на S- и Q-компоненты, т. е. на аномальные поля поверхностного и глубинного происхождения. Аномальное поле поверхностного происхождения (S-компонента) удовлетворяет уравнениям

$$\left.\begin{matrix}\operatorname{rot}\mathbf{H}^s=0,\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}^s=i\omega\mu_0\mathbf{H}^s\end{matrix}\right|_{r\geqslant R+0},\qquad \left.\begin{matrix}\operatorname{rot}\mathbf{H}^s=\sigma_n\mathbf{E}^s\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}^s=i\omega\mu_0\mathbf{H}^s\end{matrix}\right|_{r\leqslant R-0},\tag{13}$$

и граничным условиям

$$[\mathbf{E}^s_{\theta,\varphi}]_{r=R}=0,\qquad [H_r{}^s]_{r=R}=0,$$

$$[\mathbf{H}_\theta{}^s]_{r=R}=I_\varphi{}^s,\qquad [H_\varphi{}^s]_{r=R}=-I_\theta{}^s.\tag{14}$$

Эту компоненту определим следующим образом. Из условия $\operatorname{div}\mathbf{H}^s=0$ следует, что

$$\frac{\partial H_r{}^s}{\partial r}=-\frac{1}{r}\left(2H_r{}^s+\operatorname{ctg}\theta H_\theta{}^s+\frac{\partial H_\theta{}^s}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_\varphi{}^s}{\partial\varphi}\right).$$

Отсюда с учетом (14) нетрудно получить разрыв $\left[\dfrac{\partial H_r{}^s}{\partial r}\right]$ на пленке S

$$\left[\frac{\partial H_r{}^s}{\partial r}\right]_{r=R}=-\frac{1}{R}\operatorname{ctg}\theta I_\varphi{}^s-\frac{1}{R}\frac{\partial I_\varphi{}^s}{\partial\theta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial I_\theta{}^s}{\partial\varphi}.\tag{15}$$

Разложим $H_r{}^s$ и $I_\theta{}^s$, $I_\varphi{}^s$ в ряд по сферическим функциям и их производным

$$H_r{}^s=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}h_r{}^sP_l{}^m(\cos\theta)\,e^{-im\varphi},$$

$$I_\theta{}^s=-i\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}j_\theta{}^s\,\frac{mP_l{}^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\,e^{-im\varphi},\tag{16}$$

$$I_\varphi{}^s=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}j_\varphi{}^s\,\frac{dP_l{}^m(\cos\theta)}{d\theta}\,e^{-im\varphi}.$$

Условие (15) можно переписать в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left\{\frac{\partial h_r{}^s}{\partial r}\bigg|_{r=R+0}-\frac{\partial h_r{}^s}{\partial r}\bigg|_{r=R-0}\right\}P_l{}^m(\cos\theta)\,e^{-im\varphi}=$$

$$=\frac{1}{R}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left\{l(l+1)j_\varphi{}^s-\frac{m^2}{\sin^2\theta}(j_\theta{}^s+f_\varphi{}^s)\right\}P_l{}^m(\cos\theta)\,e^{-im\varphi}. \quad (17)$$

Умножая левую и правую части этого равенства на $P_k{}^q(\cos\theta)\,e^{iq\varphi}$ и интегрируя по θ и φ, получаем аналогично [5]

$$\frac{\partial h_r{}^s}{\partial r}\bigg|_{r=R+0}-\frac{\partial h_r{}^s}{\partial r}\bigg|_{r=R-0}=\frac{1}{R}\left\{l(l+1)j_\varphi{}^s-m^2A\right\}, \quad (18)$$

где

$$A=A_l{}^m=\frac{2l+1}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(j_k{}^m)_\theta{}^s+(j_k{}^m)_\varphi{}^s\right\}\int_{-1}^{1}\frac{P_k{}^m(x)P_l{}^m(x)}{1-x^2}\,dx. \quad (19)$$

Коэффициент $\dfrac{\partial h_r{}^s}{\partial r}\bigg|_{r=R+0}$ нетрудно выразить через S-компоненту магнитного потенциала, связанную с полем внутреннего происхождения

$$U^s=R\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}w^s\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}P_l{}^m(\cos\theta)\,e^{-im\varphi};\quad r\geqslant R+0. \quad (20)$$

Следовательно

$$\frac{\partial h_r{}^s}{\partial r}\bigg|_{r=R+0}=-(l+1)\,(l+2)\frac{w^s}{R}. \quad (21)$$

Коэффициент $\dfrac{\partial h_r{}^s}{\partial r}\bigg|_{r=R-0}$ выразим через w^s и нормальный импеданс Z_n.

Радиальная компонента магнитного поля присутствует только в полоидальной моде, поэтому для определения $h_r{}^s$ можно воспользоваться известным решением, игнорирующим радиальные токи [4]

$$h_r{}^s=-\frac{R}{\mu_0 r}a_l{}^m f_l(r)\,l(l+1),\qquad r\leqslant R-0, \quad (22)$$

где $f_l(r)$ — радиальная функция, связанная с нормальным импедансом

$$Z_n(w,l)=Z_n=-i\omega\mu_0\frac{rf_l(r)}{(d[rf_l(r)])/dr}\bigg|_{r=R}. \quad (23)$$

Дифференцируя $h_r{}^s$ по r и учитывая (14), (20), (23), получаем

$$\frac{\partial h_r{}^s}{\partial r}\bigg|_{r=R-0}=-\frac{1}{R}(l+1)\,w^s\left\{2+\frac{i\omega\mu_0 R}{Z_n}\right\}. \quad (24)$$

Подставляя (21) и (24) в (18), определяем w^s

$$w^s = \frac{l(l+1)\, j_\varphi{}^s - m^2 A}{(l+1)\,(i\omega\mu_0 R - lZ_n)} Z_n. \tag{25}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} h_r{}^s &= (l+1)\, w^s = \frac{l(l+1)\, j_\varphi{}^s - m^2 A}{i\omega\mu_0 R - lZ_n} Z_n, \\ h_\theta{}^s &= h_\varphi{}^s = -w^s = -\frac{l(l+1)\, j_\varphi{}^s - m^2 A}{(l+1)\,(i\omega\mu_0 R - lZ_n)} Z_n. \end{aligned} \tag{26}$$

Для определения Q-компоненты воспользуемся формулами (12)

$$h_r{}^Q = h_{ra} - h_r{}^s = \frac{i\omega\mu_0 R h_r + l(l+1)\, Z_n h_\varphi + Z_n\,(m^2 A - l(l+1)\, j_\varphi{}^s)}{i\omega\mu_0 R - lZ_n}, \tag{27}$$

$$\begin{aligned} h_\theta{}^Q &= h_\varphi{}^Q = h_{\theta a} - h_\theta{}^s = h_{\varphi a} - h_\varphi{}^s = \\ &= -\frac{i\omega\mu_0 R h_r + l(l+1)\, Z_n h_\varphi + Z_n\,(m^2 A - l(l+1)\, j_\varphi{}^s)}{(l+1)\,(i\omega\mu_0 R - lZ_n)}. \end{aligned}$$

Теперь путем синтеза сферических гармоник можно определить S- и Q-компоненты аномального поля на земной поверхности.

В формулы (26), (27) входят коэффициенты Фурье разложения поверхностного тока. Эти коэффициенты определяются по электрическому полю **E** и функции $S(\theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} j_\theta{}^s &= i\frac{2l+1}{4\pi m}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} E_\theta(\theta, \varphi)\, S(\theta, \varphi)\, e^{im\varphi} P_l{}^m(\cos\theta) \sin^2\theta\, d\varphi\, d\theta, \\ j_\varphi{}^s &= \frac{2l+1}{4\pi m}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\left\{\int\limits_0^\theta E_\varphi(\theta', \varphi)\, S(\theta', \varphi)\, d\theta' + E_\varphi(0, \varphi)\, S(0, \varphi)\right\}\times \\ &\times e^{im\varphi} P_l{}^m(\cos\theta) \sin\theta\, d\varphi\, d\theta. \end{aligned} \tag{28}$$

Таким образом, разделение аномалий переменного геомагнитного поля на поверхностные и глубинные требует совместных измерений **H**, **E** при известных σ_n и S.

Ситуация существенно упрощается, если поверхностная пленка лежит на абсолютно непроводящем слое. В этом случае необходимость в измерении **E** отпадает, так как коэффициенты $j_\theta{}^s$, $j_\varphi{}^s$ могут быть получены непосредственно по **H** путем решения системы уравнений для токовой функции. Токовая функция Ψ вводится следующим образом:

$$I^{\,s} = \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}, \qquad I^{\,s} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}. \tag{29}$$

Она удовлетворяет уравнению [3, 6, 7]

$$\operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad}\Psi}{S}\right) = i\omega\mu_0 H_r|_{r=R}. \tag{30}$$

Разложим Ψ в ряд по сферическим функциям

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \psi_l{}^m P_l{}^m(\cos\theta)\, e^{-im\varphi}. \tag{31}$$

Подставив (7), (31) в (30), получим бесконечную систему уравнений для коэффициентов Фурье

$$i\omega\mu_0 R^2 h_r = \frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k}\psi_k{}^n\alpha_k{}^n, \tag{32}$$

где

$$\alpha_k{}^n=\alpha_k{}^n(l,m)=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{P_k{}^n(\cos\theta)\left[-\frac{k(k+1)}{S}-\frac{in}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{S}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+n\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{S}\right)\right]-P_k^{n+1}(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{S}\right)\right\}e^{-i(n-m)\varphi}P_l{}^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\varphi\,d\theta.$$

При $S(\varphi,\ \theta)\equiv S_0=\text{const}$

$$\psi_l{}^m=-\frac{i\omega\mu_0 R^2 S_0}{l(l+1)}h_r, \tag{33}$$

что совпадает с известным результатом, полученным в [6].

Система уравнений (32) позволяет при известных h_r и S определить $\psi=\psi_l{}^m$ и в соответствии с (29) найти коэффициенты Фурье разложения поверхностного тока (16)

$$j_\theta{}^S=-j_\varphi{}^S=-\frac{1}{R}\psi. \tag{34}$$

Подставляя эти результаты в (18), видим, что $A=0$. При этом формулы (26), (27) принимают вид

$$h_r{}^S=\frac{l(l+1)j_\varphi{}^S}{i\omega\mu_0 R-lZ_n}Z_n,\qquad h_\theta{}^S=h_\varphi{}^S=-\frac{lj_\varphi{}^S}{i\omega\mu_0 R-lZ_n}Z_n, \tag{35}$$

$$h_r{}^Q=\frac{i\omega\mu_0 Rh_r+l(l+1)Z_n(h_\varphi-j_\varphi{}^S)}{i\omega\mu_0 R-lZ_n},$$
$$h_\theta{}^Q=h_\varphi{}^Q=-\frac{i\omega\mu_0 Rh_r+l(l+1)Z_n(h_\varphi-j_\varphi{}^S)}{(l+1)(i\omega\mu_0 R-lZ_n)}. \tag{36}$$

Таким образом, получены формулы, позволяющие разделить переменное геомагнитное поле на нормальное поле, связанное с индукцией в сферически-однородной Земле, и аномальные поля, связанные с действием поверхностных и глубинных неоднородностей.

С помощью развитого в работе метода можно попытаться исключить влияние Мирового океана на переменное геомагнитное поле и выделить аномалии поля, вызванные колебаниями глубинных геоэлектрических границ.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Н. Бердичевский, М. С. Жданов. Геомагн. и аэрономия, 1973, **13**, 339.
2. М. С. Жданов, М. Н. Бердичевский. Геомагн. и аэрономия, 1973, **13**, 1110.
3. М. Н. Бердичевский, М. С. Жданов, О. Н. Жданова. Геомагн. и аэрономия, 1974, **14**, 136.
4. М. Н. Бердичевский, Л. Л. Ваньян, Э. Б. Файнберг. Геомагн. и аэрономия, 1969, 9, 372.
5. М. Н. Бердичевский, Э. Б. Файнберг. Геомагн. и аэрономия, 1972, **12**, 950.
6. Т. Рикитаки. Электромагнетизм и внутреннее строение Земли. «Недра», 1968.
7. U. Schmucker. J. Geomagn. Geoelectr., 1964, **15**, 193.

Московский государственный университет
Московский институт нефтехимической
и газовой промышленности им. И. М. Губкина

Статья поступила
21 декабря 1972 г.