АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ГЕОЛОГИЯ
и
ГЕОФИЗИКА
№ 6

Отдельный оттиск

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск · 1975

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ГЕОЛОГИЯ И ГЕОФИЗИКА
№ 6
1975

УДК 550.831

М. С. ЖДАНОВ

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ТРЕХМЕРНОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Представления гравитационных полей в виде гармонических аналогов интегралов типа Коши по поверхности возмущающих тел, полученные для масс, сосредоточенных в конечных областях пространства, распространены на случай бесконечно протяженных областей. На основе этих представлений проанализированы прямые и обратные задачи структурной гравиметрии в трехмерной постановке.

В работе [1] получены новые интегральные представления для компонент гравитационного поля масс, сосредоточенных в конечных областях пространства, в виде гармонических аналогов интегралов типа Коши по поверхности возмущающих тел и изучены их свойства. В настоящей статье эти результаты распространены на случай, особенно интересный для структурной гравиметрии, когда возмущающие тела простираются в бесконечность.

Методам решения задач структурной гравиметрии в последние годы уделяется большое внимание, поскольку эти методы имеют первостепенное значение в поисках и разведке нефтяных и газовых месторождений. Однако в большинстве из опубликованных в последнее время работ структурные задачи рассматриваются в упрощенной, двумерной постановке [3—5]. Нами эти результаты обобщаются на трехмерный случай, т. е. задачи структурной гравиметрии исследуются в полной (трехмерной) постановке.

Представление гравитационного поля бесконечной однородной области в виде гармонических аналогов интегралов типа Коши

Рассмотрим область Ω, ограниченную кусочно-гладкой поверхностью Γ и плоскостью Π (рис. 1), которые в прямоугольной декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) заданы следующими уравнениями:

$$\Gamma\colon\ x_3 = z(x_1, x_2) - h; \quad (1)$$
$$\Pi\colon\ x_3 = -h;$$

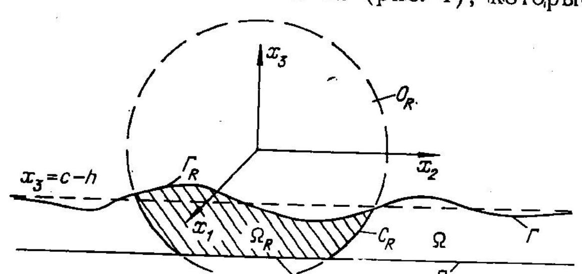

Рис. 1. К вычислению гравитационного эффекта бесконечно протяженной области Ω.

где $0 \leqslant z(x_1, x_2) \leqslant h$ и $(z(x_1, x_2) - c)\rho \to 0$ при $\rho \to \infty$; $\left(\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ 0 \leqslant \leqslant c \leqslant h,\right)$ т. е. поверхность Γ при больших ρ асимптотически приближается к горизонтальной плоскости $x_3 = c - h$, причем отклонение Γ от этой плоскости есть бесконечно малая величина высшего порядка малости, чем $1/\rho$. Вычислим гравитационный эффект области Ω, заполненной массами однородной плотности σ. Для этого выделим из Ω область Ω_R, ограниченную сферической поверхностью O_R: $\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)=R^2$ с центром в начале координат и радиуса R — и частями Γ_R и Π_R поверхностей Γ и Π, вырезаемыми из них сферой O_R. Поверхность сферы O_R, заключенную между Γ и Π, обозначим C_R. Тогда гравитационный эффект области Ω можно определить:

$$U^R_{,\alpha}(x)=\lim_{P\to\infty} U^R_{,\alpha}(x);\qquad (2)^*$$
$$x\notin\bar{\Omega},$$

где $U^R_{,\alpha}(x)$ — производные внешнего гравитационного потенциала области $\bar{\Omega}_R$; $\bar{\Omega}$ — замыкание области Ω.

Функция $U^R_{,\alpha}(x)$, согласно [1], определяется с помощью гармонического аналога интеграла типа Коши по поверхности $S_R=C_R+\Pi_R+ +\Gamma_R$, ограничивающей область Ω_R:

$$U^R_{,\alpha}(x)=\frac{4\pi}{3}f\sigma K^{S_R}_{,\alpha}(x;\ y_\beta),\quad x\notin\Omega_R \qquad (3)$$

где

$$K^S_{,\alpha}(x;\ \varphi_{,\beta}(y))=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \Delta_{\alpha\beta kl}\frac{x_k-y_k}{|x-y|^3}\cdot\varphi_{,\beta}(y)\,\nu_l(y)\,dS_y, \qquad (4)$$
$$\alpha,\ \beta,\ k,\ l=1,\ 2,\ 3.$$

Здесь и в дальнейшем применяется суммирование по повторяющимся индексам. $\Delta_{\alpha\beta kl}$ — 4-индексная матрица, образованная комбинацией символов Кронекера:

$$\Delta_{\alpha\beta kl}=\delta_{\alpha\beta}\cdot\delta_{kl}+\delta_{\alpha k}\cdot\delta_{\beta l}-\delta_{\alpha l}\cdot\delta_{\beta k}; \qquad (5)$$
$$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1;\ \alpha=\beta;\\ 0;\ \alpha\neq\beta;\end{cases}$$

$\bar{\nu}=(\nu_1;\ \nu_2;\ \nu_3)$ — единичный вектор внешней (по отношению к Ω_R) нормали к поверхности S_R.

Интеграл типа Коши по поверхности S_R, стоящий в выражении (3), можно представить в виде суммы двух интегралов по поверхностям (Γ_R+C_R) и Π_R

$$K^{S_R}_{,\alpha}(x;\ y_\beta)=K^{\Gamma_R+C_R}_{,\alpha}(x;\ y_\beta)+K^{\Pi_R}_{,\alpha}(x;\ y_\beta). \qquad (6)$$

Интеграл по плоскости Π_R, в свою очередь, можно преобразовать в интеграл по (Γ_R+C_R). В самом деле, введем в рассмотрение функцию $\psi(y)$

$$\psi(y)=-y_3^2+\frac{1}{2}\left(y_1^2+y_2^2\right)-3hy_3; \qquad (7)$$

тогда имеет место равенство

$$\psi_{,\alpha}(y)\big|_{y\in\Pi}=y_\alpha. \qquad (8)$$

Функция $\psi(y)$ гармонична в любой конечной области пространства, поэтому, согласно свойствам гармонических аналогов интегралов типа Коши [1]

$$K^{S_R}_{,\alpha}(x;\ \psi_{,\beta}(y))\equiv 0,\qquad x\notin\bar{\Omega}_R. \qquad (9)$$

---

* Здесь и ниже индекс, отделенный запятой, означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Следовательно,

$$K_{,\alpha}^{\Gamma_R+C_R}(x;\ \psi_{,\beta}(y))+K_{,\alpha}^{\Pi_R}(x;\ \psi_{,\beta}(y))=0;$$

откуда, с учетом (8)

$$K_{,\alpha}^{\Pi_R}(x;\ y_\beta)=-K_{,\alpha}^{\Gamma_R+C_R}(x;\ \psi_{,\beta}(y)). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (6) и затем в (3), находим

$$U_{,\alpha}^{R}(x)=\frac{4\pi}{3}\cdot f\cdot\sigma\cdot K_{,\alpha}^{\Gamma_R+C_R}(x;\ y_\beta-\psi_{,\beta}(y)), \tag{11}$$

где

$$y_\beta-\psi_{,\beta}(y)=\begin{cases}0; & \beta=1,2.\\ 3(y_3+h); & \beta=3.\end{cases} \tag{12}$$

Устремляя в (11) величину R к бесконечности и подставляя в (2), определяем

$$U_{,\alpha}(x)=\frac{4\pi}{3}f\cdot\sigma\left\{\lim_{R\to\infty}K_{,\alpha}^{\Gamma_R}(x;\ y_\beta-\psi_{,\beta}(y))+\lim_{R\to\infty}K_{,\alpha}^{C_R}(x;\ y_\beta-\psi_{,\beta}(y))\right\}. \tag{13}$$

Подинтегральное выражение в интеграле типа Коши по поверхности C_R убывает как a/R^2, где $a=\text{const}$. В то же время, площадь поверхности C_R при больших R не превышает площади прямого кругового цилиндрического кольца высоты h и радиуса R. Следовательно,

$$\left|K_{\alpha,}^{C_R}(x;\ y_\beta-\psi_{,\beta}(y))\right|\leqslant\frac{a\cdot h}{2\cdot R}\to 0\quad \text{при } R\to\infty.$$

Поэтому формула (13) принимает вид:

$$U_{,\alpha}(x)=\frac{4\pi}{3}f\cdot\sigma\cdot K_{,\alpha}^{\Gamma}(x;\ y_\beta-\psi_{,\beta}(y)), \tag{14}$$

где

$$y_\beta-\psi_{,\beta}(y)=\begin{cases}0; & \beta=1,2.\\ 3(y_3+h); & \beta=3.\end{cases} \tag{15}$$

Раскрывая, согласно определению (4), выражение для интеграла типа Коши в (14) и учитывая (15), имеем

$$U_{,\alpha}(x)=4\pi f\cdot\sigma\cdot K_{,\alpha}^{\Gamma}(x;\ y_3+h)= \tag{16}$$

$$=-f\cdot\sigma\cdot\iint_{\Gamma}\Delta_{\alpha 3kl}\frac{x_k-y_k}{|x-y|^3}(y_3+h)\,\nu_l(y)\,ds_y,\quad x\notin\bar{\Omega},$$

где $\nu_l(y)$, $l=1,\ 2,\ 3$ — компоненты единичного вектора нормали к Г, направленного в верхнее полупространство. Таким образом, мы получили представление для гравитационного поля бесконечно протяженной области Ω в виде гармонического аналога интеграла типа Коши. Эта формула обобщает на трехмерный случай соответствующие соотношения, полученные в [3] для двумерных гравитационных полей с помощью аппарата теории функций комплексного переменного.

Аналогично формуле (16) можно получить выражения для гравитационного поля области Ω^*, заключенной между плоскостью П и поверхностью S, проходящей ниже П:

$$S:\quad x_3=-z(x_1,\ x_2)-h, \tag{17}$$

$$0\leqslant z(x_1,\ x_2)\leqslant H=\text{const}.$$

В этом случае

$$U_{,\alpha}(x) = -\frac{4\pi}{3} f\cdot\sigma\cdot K^S_{,\alpha}(x;\ y_\beta - \psi_{,\beta}(y)) = -4\pi f\cdot\sigma K^S_{,\alpha}(x;\ y_3 + h) =$$

$$= f\cdot\sigma\cdot\iint\limits_S \Delta_{\alpha 3kl}\frac{x_k - y_k}{|x-y|^3}(y_3 + h)\cdot\nu_l(y)\,dS_y,\quad x\notin\bar{\Omega}^*, \tag{18}$$

где $\nu_l(y)$, $l=1, 2, 3$,— то же, что и в [16].

Преобразуем выражение |16| к виду, удобному для практических вычислений. Очевидно, что на поверхности Г:

$$\nu_1(y)ds_y = -z_{,1}(y_1,\ y_2)dy_1dy_2;$$

$$\nu_2(y)ds_y = -z_{,2}(y_1,\ y_2)dy_1dy_2;$$

$$\nu_3(y)ds_y = dy_1dy_2;$$

$$y_3 = z(y_1,\ y_2) - h.$$

Следовательно, соотношение (16) после выполнения суммирования по повторяющимся индексам можно записать:

$$U_{,3}(x_1,\ x_2,\ x_3) = f\sigma\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} z\cdot\frac{(x_1-y_1)\cdot z_{,1} + (x_2-y_2)\cdot z_{,2} - (x_3 - z + h)}{[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3 - z + h)^2]^{3/2}}\,dy_1\,dy_2;$$

$$U_{,\hat\alpha}(x_1,\ x_2,\ x_3) = -f\sigma\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} z\cdot\frac{(x_{\hat\alpha} - y_{\hat\alpha}) + (x_3 - z + h)\,z_{,\hat\alpha}}{[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3 - z + h)^2]^{3/2}}\,dy_1dy_2. \tag{19}$$

$$\hat\alpha = 1,\ 2.$$

Формулы (19) удобны при практических расчетах прямого эффекта от материального слоя, заключенного между поверхностями Г и П. Если поверхность Г меняется плавно и незначительно отклоняется от плоскости П, т. е.

$$|z,\ \hat\alpha| << 1;\ \hat\alpha = 1,\ 2,$$

$$|z/h| << 1,$$

то формулы (19) обращаются в известные выражения для производных потенциала простого слоя с поверхностной плотностью $\mu(y,\ y_2) = \sigma\cdot z(y_1,\ y_2)$:

$$U_{,3}(x) = -f\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu\frac{x_3 + h}{[(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3+h)^2]^{3/2}}\,dy_1\,dy_2;$$

$$U_{,\hat\alpha}(x) = -f\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu\frac{x_{\hat\alpha} - y_{\hat\alpha}}{[x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3+h)^2]^{3/2}}\,dy_1dy_2. \tag{20}$$

Вычисление гравитационного поля трехмерной слоистой среды

С помощью соотношений (14), (16), (18) подобно тому, как это сделано в [4] для двумерных полей, может быть вычислен гравитационный эффект от произвольной трехмерной слоистой среды.

Рассмотрим модель, изображенную на рис. 2. Модель состоит из n однородных слоев с плотностями $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ соответственно, отделенных друг от друга кусочно-гладкими взаимно непересекающимися поверхностями $S_1,\ S_2, \ldots,\ S_{n-1}$, каждая из которых на достаточно большом расстоянии ρ от начала координат асимптотически приближается к соответствующей горизонтальной плоскости $P_1,\ P_2, \ldots,\ P_{n-1}$.

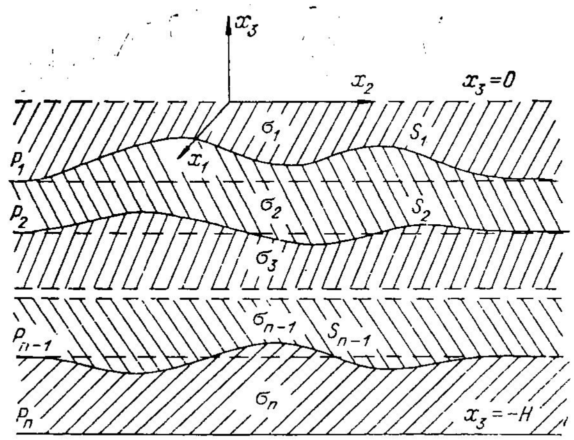

Рис. 2. Модель слоистой среды.

Причем, отклонения S_i от P_i есть бесконечно малые величины высшего порядка малости, чем $1/\rho$. Нижний слой ограничен горизонтальной плоскостью $S_n = P_n : x_3 = -H$. Обозначим через $U^{ij}_{,\alpha}(x)$ гравитационный эффект от слоя, заключенного между координатной плоскостью $x_3=0$ и поверхностью S_i и заполненного массами плотности σ_j. Тогда суммарное поле от всей слоистой среды можно представить в виде

$$U_{,\alpha}(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\left[U^{(ii)}_{,\alpha}(x) - U^{(ii+1)}_{,\alpha}(x)\right] + U^{(nn)}_{,\alpha}(x). \tag{21}$$

Производные потенциала притяжения $U^{(nn)}_{,\alpha}(x)$ однородного горизонтального слоя, заключенного между плоскостями $x_3=0$ и P_n и заполненного массами плотности σ_n, как известно, равны

$$U^{(nn)}_{,\alpha}(x) = -2\pi f\sigma_n H \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x_3) = \begin{cases} 0; & \alpha = 1,2; \\ -2\pi f\sigma_n H; & \alpha = 3. \end{cases} \tag{22}$$

Выражения $U^{(ij)}_{,\alpha}(x)$, согласно (18), определяются

$$U^{(ij)}_{,\alpha}(x) = -\frac{4\pi}{3} f\sigma_j K^{S_i}_{,\alpha}\left(x;\, y_\beta - \psi^0_{,\beta}(y)\right), \tag{23}$$

$$x_3 > 0,$$

где $\psi^0(y)$ в соответствии с (7) и условием $h=0$ равно

$$\psi^0(y) = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right) - y_3^2. \tag{24}$$

Подставляя (22) и (23) в (21), находим

$$U_{,\alpha}(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\left\{\frac{4\pi}{3} f\Delta\sigma_i K^{S_i}_{,\alpha}\left(x;\, y_\beta - \psi^0_\beta(y)\right)\right\} - 2\pi f\sigma_n H\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x_3) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left\{-f\Delta\sigma_i \iint_{S_i} \Delta_{\alpha 3kl}\frac{x_k - y_k}{|x-y|^3} y_3 \nu_l(y)\, dS_y\right\} - 2\pi f\,\sigma_n H\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x_3), \tag{25}$$

где $\Delta\sigma_i = \sigma_{i+1} - \sigma_i$; $\nu_l(y)$, $l=1,\ 2,\ 3$ — компоненты единичных векторов нормалей к поверхностям S_i, направленных в верхнее полупространство.

Формула (25) показывает, что гравитационное поле произвольной слоистой среды может быть представлено в виде суммы интегралов типа Коши по поверхностям S_i разделов однородных слоев и постоянного члена $\left(-2\pi f\sigma_n H\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x_3)\right)$, описывающего притяжение горизонтального слоя высоты H и плотности σ_n. Таким образом, аномальная часть внешнего гравитационного поля $\Delta U_{,\alpha}(x)$ слоистой среды (т. е. изменяющаяся в пространстве составляющая поля) определяется только суперпозицией интегралов типа Коши по плотностным поверхностям раздела

$$\Delta U_{,\alpha}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} U_{,\alpha}^{S_i}(x), \tag{26}$$

где $U_{,\alpha}^{S_i}(x) = \frac{4\pi}{3} f\Delta\sigma_i K_{,\alpha}^{S_i}\left(x; y_\beta - \psi_{,\beta}^{0}(y)\right) = -f\Delta\sigma_i \iint\limits_{S_i} \Delta_{\alpha 3 kl} \frac{x_k - y_k}{|x-y|^3} \cdot$

$$\cdot\, y_3 \nu_l(y)\, dS_y;\ x_3 > 0. \tag{27}$$

Выражение (27) можно интерпретировать как гравитационный эффект плотностной границы S_i (контактной поверхности), отвечающей скачку плотности $\Delta\sigma_i$.

Аналитическое продолжение аномального гравитационного поля слоистой среды через плотностные границы раздела и особые точки поля

Методы аналитического продолжения и поисков особых точек широко применяются для решения обратных задач гравиметрии. Поэтому при исследовании структурных задач важное значение имеет вопрос об условиях, обеспечивающих возможность аналитического продолжения гравитационного поля трехмерной слоистой среды через контактные поверхности, и расположении особых точек продолженного поля. В двумерном случае эта задача решается с помощью формул Сохоцкого — Племеля для комплексно-аналитических функций [3—5]. В трехмерной постановке для решения задачи естественно использовать гармонические аналоги указанных формул [1].

Согласно выражению (26), аномальное гравитационное поле слоистой среды, в общем случае равно сумме гравитационных полей от соответствующих контактных поверхностей. Поэтому изучение свойств аналитически продолженного поля $\Delta U_{,\alpha}(x)$ можно начать с анализа гравитационного поля какой-либо одной границы S_i, отвечающей плотностному скачку $\Delta\sigma_i$:

$$U_{,\alpha}^{S_i}(x) = \frac{4\pi}{3} f\Delta\sigma_i K_{,\alpha}^{S_i}\left(x; y_\beta - \psi_{,\beta}^{0}(y)\right), \tag{28}$$

где

$$\psi^0(y) = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right) - y_3^2;\ x_3 > 0.$$

Интеграл типа Коши, стоящий в правой части /28/, как известно [1], имеет смысл как в точках, лежащих выше S_i (верхнее полупространство D_i^+), так и в точках, расположенных ниже S_i (нижнее полупространство D_i^-), и описывает в пространстве кусочно-гармоническую функцию

$$\frac{4\pi}{3} f\Delta\sigma_i K_{,\alpha}^{S_i}\left(x; y_\beta - \psi_{,\beta}^{0}(y)\right) = \begin{cases} U_{,\alpha}^{S_i}(x); & x \in D_i^+; \\ V_{,\alpha}^{S_i}(x); & x \in D_i^-. \end{cases} \tag{29}$$

Отсюда немедленно следует, что ограничение $x_3 > 0$, появившееся в (27) в связи с тем, что аномальное гравитационное поле слоистой среды рассматривалось вне этой среды, несущественно. То есть, внешнее гравитационное поле плотностной границы S_i, определяемое выражением (28), может быть продолжено через координатную плоскость $x_3=0$ до поверхности S_i:

$$U^{S_i}_{,\alpha}(x)=\frac{4\pi}{3}f\Delta\sigma_i K^{S_i}_{,\alpha}(x;\, y_\beta-\psi^0_{,\beta}(y));\quad x\in D_i^+. \tag{30}$$

Сложнее обстоит дело с продолжением внешнего поля через контактную поверхность S_i. Для решения этой задачи следует, как уже указывалось выше, воспользоваться гармоническими аналогами формул Сохоцкого — Племеля [1], устанавливающими связь между предельными значениями интеграла типа Коши (29) на поверхности S_i при приближении к этой поверхности сверху и снизу соответственно:

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in D_i^+}} U^{S_i}_{,\alpha}(x)-\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in D_i^-}} V^{S_i}_{,\alpha}(x)=\frac{4\pi}{3}f\Delta\sigma_i\left(x^0_\alpha-\psi^0_{,\alpha}(x^0)\right),$$

или

$$U^{S_i}_{,\alpha}(x^0)-V^{S_i}_{,\alpha}(x^0)=\frac{4\pi}{3}f\Delta\sigma_i\left(x^0_\alpha-\psi^0_{,\alpha}(x^0)\right), \tag{31}$$

где

$$x^0\in S_i.$$

В работе [1] было указано, что проблема аналитического продолжения гравитационного поля через границу области, занятой возмущающими массами, тесно связана с аналогическими свойствами этой границы. Покажем, что аналогичные соотношения имеют место и для полей контактных поверхностей.

Пусть Σ — аналитический кусок поверхности S_i. Тогда нетрудно убедиться, что Σ является гармонической поверхностью [1], т. е. в окрестности Σ существует гармоническая функция $\varphi(x)$ такая, что

$$\varphi_{,\alpha}(x)=x_\alpha \quad \text{при } x\in\Sigma \quad \alpha=1,\,2,\,3. \tag{32}$$

Действительно, по теореме Коши — Ковалевской [2] в некоторой окрестности поверхности Σ существует аналитическая функция $\Theta(x)$, удовлетворяющая уравнению Пуассона

$$\Theta(x)=-3 \tag{33}$$

и граничным условиям

$$\Theta_{,\alpha}(x)|_\Sigma=0;\qquad \alpha=1,\,2,\,3.$$

Положим

$$\varphi(x)=\Theta(x)+\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right); \tag{34}$$

тогда $\Delta\varphi(x)=0$ и выполняются условия (32), что и требовалось доказать. Соотношение (32) можно рассматривать как уравнение, определяющее аналитический кусок поверхности Σ. В дальнейшем это уравнение мы будем называть уравнением поверхности Σ *в гармонической форме*. В частности, уравнение (8), которое использовалось для вычисления гравитационного поля бесконечной однородной области Ω, представляет собой гармоническую форму задания уравнения плоскости. Итак, всякая аналитическая поверхность гармонична. С другой стороны, очевидно, что если Σ — гармоническая поверхность, то она аналитична. Поэтому понятие гармонической поверхности, введенное в [1], совпадает с понятием аналитической поверхности. С учетом (32) соотношение (31) записывается:

$$U^{S_i}_{,\alpha}(x^0)-V^{S_i}_{,\alpha}(x^0)=\frac{4\pi}{3}f\Delta\sigma^i\left(\varphi_{,\alpha}(x^0)-\psi^0_{,\alpha}(x^0)\right), \tag{35}$$

откуда

$$U^{S_i}_{,\alpha}(x^0)=\frac{4\pi}{3}f\Delta\sigma_i(\varphi_{,\beta}(x^0)-\psi^0_{,\alpha}(x^0))+V^{S_i}_{,\alpha}(x^0). \tag{36}$$

Выражение (36) позволяет непосредственно решить задачу об аналитическом продолжении внешнего гравитационного поля контактной поверхности через эту поверхность. В самом деле, функции, стоящие в правой части (36), могут быть аналитически /гармонически/ продолжены внутрь области D_i^-, следовательно, и $U^{S_i}_{,\alpha}(x^0)$ можно продолжить в D_i^-

$$U^{S_i}_{,\alpha}(x)=\frac{4\pi}{3}f\Delta\sigma_i(\varphi_{,\alpha}(x)-\psi^0_{,\alpha}(x)+V^{S_i}_{,\alpha}(x));\quad x\in D_i^-. \tag{37}$$

Аналогично, опираясь на формулу (35), можно показать, что функция $V^{S_i}_{,\alpha}(x^0)$ — может быть аналитически (гармонически) продолжена в D_i^+:

$$V^{S_i}_{,\alpha}(x)=-\frac{4\pi}{3}f\Delta\sigma_i(\varphi_{,\beta}(x)-\psi^0_{,\beta}(x))+U^{S_i}_{,\alpha}(x),\quad x\in D_i^+. \tag{38}$$

Таким образом, если Σ — аналитический (гармонический) кусок контактной поверхности S_i, то внешнее аномальное гравитационное поле $U^{S_i}_{,\alpha}(x)$ может быть продолжено в нижнее полупространство D_i^-, а поле $V^{S_i}_{,\alpha}(x)$ в верхнее полупространство D_i^+ через любую точку поверхности Σ, исключая, быть может, контур, ее ограничивающий. При этом множество особых точек аналитически (гармонически) продолженных сквозь Σ полей совпадает со множеством особенностей функций $\varphi_{,\beta}(x)$ в D_i^- или D_i^+ соответственно (функция $\psi^0(x)$, определяющая координатную плоскость $x_3=0$, имеет особенность только на бесконечности).

В частном случае, если вся поверхность S_i аналитическая и ее уравнение в гармонической форме имеет вид

$$\varphi^{S_i}_{,\alpha}(x)=x_\alpha, \tag{39}$$

то внешнее аномальное гравитационное поле может быть продолжено в нижнее полупространство через любую точку контактной поверхности, причем выражение для $U^{S_i}_{,\alpha}(x)$ в этом случае принимает вид:

$$U^{S_i}_{,\alpha}(x)=\frac{4\pi}{3}f\Delta\sigma_i K^{S_i}_{,\alpha}(x;\ \varphi^{S_i}_{,\beta}(y)-\psi^0_{,\beta}(y)). \tag{40}$$

Таким образом, гравитационное поле аналитической контактной поверхности S_i не имеет граничных особенностей (по терминологии работы [5]), т. е. все его особые точки располагаются ниже S_i. В том же случае, когда поверхность S_i — кусочно-аналитическая, функции $U^{S_i}_{,\alpha}(x)$ и $V^{S_i}_{,\alpha}(x)$ могут иметь граничные особенности. Действительно, пусть поверхность S_i составлена из конечного числа аналитических кусков Σ_m, $m=1, 2, \ldots, N$ (ограниченных контурами γ_m), уравнения которых в гармонической форме имеют вид

$$\varphi^{\Sigma_m}_{,\alpha}(x)=x_\alpha, \tag{41}$$

причем, все функции $\varphi^{\Sigma_m}_{,\alpha}(x)$, $m=1, 2, \ldots, N$ попарно различны. Тогда, при аналитическом продолжении функций $U^{S_i}_{,\alpha}(x)$ и $V^{S_i}_{,\alpha}(x)$ через поверхности Σ_m и Σ_p, $m\neq p$, мы приходим, согласно (37), (38), к различным значениям продолженных полей, т. е. контуры γ_m, $m=1, 2, \ldots, N$ являются особыми — линиями ветвления полей.

Все результаты, изложенные выше, получены нами для одной контактной поверхности S_i. Очевидно, что они справедливы и для произвольной трехмерной слоистой среды, составленной из конечного числа контактных поверхностей (рис. 2).

Подводя итог проведенных исследований, можно сделать вывод, что трехмерные задачи структурной гравиметрии допускают столь же полный теоретический анализ, как и двумерные задачи. При этом основные свойства трехмерных гравитационных полей в слоистых средах аналогичны свойствам двумерных полей. В то же время вычислительные формулы существенно отличаются от соответствующих формул, полученных для двумерных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жданов М. С. О свойствах гравитационного потенциала трехмерного однородного тела. Геол. и геофиз., 1973, № 12.
2. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. ОГИЗ — Гостехиздат, 1946.
3. Страхов В. Н. Некоторые вопросы плоской задачи гравиметрии. Изв. АН СССР, Физ. Земли, 1970, № 12.
4. Страхов В. Н. К теории структурной гравиметрии. Сб. Прикл. геофиз., «Недра», 1972, вып. 68.
5. Страхов В. Н. Об обратной задаче логарифмического потенциала для контактной поверхности. Изв. АН СССР, Физ. Земли, 1974, № 2.

Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. И. М. Губкина

Поступила в редакцию 28 июня 1974 г.

M. S. Zhdanov

GRAVITY FIELD OF THREE-DIMENSIONAL LAMINAR MEDIUM

The representation of the gravity fields as harmonic analogues of Chauchy integral type over the surface of perturbing bodies derived for masses concentrated in finite space rebions are extended to the case of intinitely extended domains. Straightforward and reverse problems of structural gravimetry were analysed as based on these representation in the three-dimensional approach.