

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР
ФИЗИКА ЗЕМЛИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

9

МОСКВА · 1975

М. С. ЖДАГОВ

**ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГЛУБИННЫХ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
АНОМАЛИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОГО
ПРОДОЛЖЕНИЯ**

Рассматриваются вопросы интерпретации глубинных электромагнитных аномалий на основе методов аналитического продолжения переменных электромагнитных полей. Предлагается способ выделения первичных глубинных аномалий из наблюдаемого аномального поля. Приводятся интегральные представления для первичных глубинных аномалий в виде электродинамических аналогов интегралов типа Коши. С помощью этих представлений исследуется связь формы поверхности проводящих тел с особыми точками аналитически продолженных электромагнитных полей.

Предлагаемая теория представляет собой обобщение на случай переменных электромагнитных полей известных методов аналитического продолжения и поисков особых точек потенциальных полей, широко используемых при решении обратных задач в гравитразведке и магниторазведке.

В геофизических методах электромагнитного профилирования основным объектом изучения являются аномалии электромагнитного поля, обусловленные горизонтальными неоднородностями в строении геологического разреза. Электромагнитные аномалии, наблюдаемые на поверхности Земли, в соответствии с природой вызывающих их источников можно разделить на две большие группы.

I. Поверхностные аномалии. Они вызываются электрической неоднородностью приповерхностного слоя Земли.

II. Глубинные аномалии. Эти аномалии связаны с действием проводящих зон в земной коре и верхней мантии.

Методы интерпретации поверхностных и глубинных аномалий существенно различаются. В то же время обе группы аномалий обычно наблюдаются вместе, т. е. аномальное поле возбуждается одновременно двумя типами источников — поверхностными и глубинными, электромагнитно связанными между собой. В рамках настоящей статьи мы ограничимся рассмотрением вопросов интерпретации только глубинных аномалий. Первая задача, возникающая при этом, состоит в выделении эффекта глубинных неоднородностей из наблюдаемого аномального поля. Эта задача может быть решена при условии, если параметры приповерхностного неоднородного слоя Земли известны. Методы выделения глубинных аномалий для случая аппроксимации приповерхностного неоднородного слоя тонкой проводящей пленкой Прайса — Шеймана приведены в работах [1, 2]. В настоящей статье рассмотрен способ решения этой задачи для горизонтально-неоднородного слоя произвольной толщины.

После выделения глубинных электромагнитных аномалий возникает проблема геологического истолкования последних, т. е. определения параметров глубинных геоэлектрических неоднородностей. Эта проблема является одной из наиболее трудных в теории интерпретации. Существующие методы обычно основываются на анализе решений задач дифракции элект-

ромагнитных волн на объектах простой геометрической формы, моделирующих реальные геоэлектрические неоднородности [3, 4]. Однако решение указанных задач сопряжено с большими математическими трудностями и приводит к громоздким формулам, затрудняющим инженерный расчет и физическую интерпретацию получаемых результатов. Практически на сегодняшний день мы имеем возможность сопоставлять наблюдаемые электромагнитные аномалии с теоретическими полями, рассчитанными для ограниченного числа простейших тел: цилиндр, шар, эллипсоид, сфероид, пласт. Такое состояние теории интерпретации резко сужает практические возможности изучения глубинных геоэлектрических неоднородностей. В статье рассматривается другой подход к решению этой проблемы, основанный на методе аналитического продолжения переменных электромагнитных полей, развиваемом в работах [5-8].

При интерпретации глубинных электромагнитных аномалий метод продолжения полей может быть использован в нескольких аспектах. Первый аспект состоит в том, что исключение влияния поверхностных неоднородностей на аномальное поле осуществляется только при помощи продолжения поля с поверхности наблюдения на основании приповерхностного неоднородного слоя (см. § 1). Таким образом, продолжение поля является необходимой предварительной процедурой для выделения глубинных аномалий.

Второй аспект заключается в применении продолжения полей как способа трансформации глубинных аномалий. Продолжение переменного электромагнитного поля в сторону источников так же, как и в случае гравиметрической задачи, оказывает «фокусирующее» действие на поле. Суммарные аномалии, обусловленные воздействием нескольких соседних объектов, «расщепляются» в пространстве на ряд локальных аномалий от каждого объекта в отдельности. Этот эффект, широко используемый в грави- и магниторазведке при анализе потенциальных полей, может быть также с успехом применен для интерпретации переменных электромагнитных аномалий.

Третий аспект состоит в использовании методов продолжения для восстановления пространственной картины распределения электромагнитного поля. Анализ этого распределения позволяет (по характеру поведения токовых линий поля) наметить возможное местоположение глубинных неоднородностей, их размеры и форму. Подробно этот аспект обсужден в работе [6].

Наконец, четвертый аспект применения теории аналитического продолжения для интерпретации электромагнитных аномалий состоит в поиске особых поверхностей, линий и точек продолженного поля, которые можно рассматривать как эффективные источники глубинных аномалий [9]. Согласно общей теории аналитических функций, эти источники определяются по внешнему полю однозначно. Поэтому центральным вопросом теории интерпретации глубинных аномалий при данном подходе является вопрос о связи эффективных источников с реальными геоэлектрическими объектами. Для решения указанной проблемы в работе предлагается использовать аппарат электродинамических аналогов интегралов типа Коши. Отметим, что этот подход к интерпретации глубинных аномалий представляет собой обобщение на случай переменных электромагнитных полей известной концепции особых точек в гравиразведке и магниторазведке [10-12].

§ 1. ВЫДЕЛЕНИЕ ПЕРВИЧНЫХ ГЛУБИНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

Рассмотрим модель, изображенную на рис. 1, в которой неоднородная земля при $x_3=0$ граничит с однородной атмосферой. Поверхностные геоэлектрические неоднородности в модели представлены горизонтальным

слоем толщиной d с комплексной диэлектрической проницаемостью $\tilde{\epsilon}$, которая является аналитической функцией горизонтальных координат $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(x_1, x_2)$. Среда ниже слоя однородна и характеризуется постоянной комплексной диэлектрической проницаемостью ϵ , за исключением области Q , где ϵ меняется по произвольному закону:

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \epsilon, & x \notin Q, \\ \epsilon + \Delta\epsilon(x), & x \in Q. \end{cases}$$

Электромагнитное поле в модели (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$) возбуждается произвольной системой источников, расположенных в области P в атмосфере (диэлектрическая проницаемость воздуха ϵ_0). Магнитная проницаемость повсюду принята постоянной $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м.

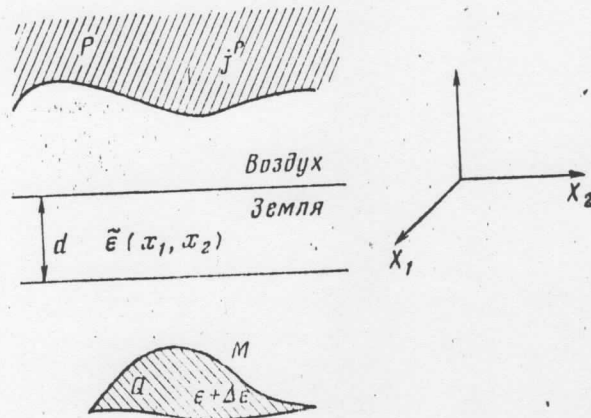


Рис. 1

Электромагнитные поля Π^+ , E^+ заданы на земной поверхности (при $x_3 = 0$, т. е. внутри Земли). Необходимо выделить эффект глубинных неоднородностей при условии, если параметры приповерхностного неоднородного слоя $\tilde{\epsilon}$, d известны.

Определим плотность избыточных токов, текущих в области Q :

$$j^q(x) = -i\omega\Delta\epsilon(x) \cdot E(x), \quad x \in Q, \quad (1)$$

и, следуя работам [2, 13], назовем первичным глубинным аномальным полем Π^q , E^q — поле, возбуждаемое токами j^q в однородной изотропной среде с параметрами ϵ , μ . Тогда задача выделения глубинных неоднородностей сводится к нахождению первичных глубинных электромагнитных аномалий. Решим эту задачу. Предварительно продолжим электромагнитное поле с поверхности наблюдения на основание неоднородного слоя $x_3 = -d$. Для этого воспользуемся методом, предложенным в [7] для продолжения поля в квазистационарном приближении. Метод основан на разложении магнитного поля в ряд Тейлора по вертикальной координате

$$\Pi^- = \Pi(-d) = \Pi^+ + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-d)^p}{p!} \left(\frac{\partial^p \Pi}{\partial x_3^p} \right)^+ \quad (2)$$

Вычислим с помощью уравнений Максвелла в слое

$$\begin{cases} \text{rot } \Pi = -i\omega\epsilon E = \mathbf{I}, \\ \text{rot } E = i\omega\mu \Pi \end{cases} \quad (3)$$

вертикальные производные магнитного поля p -го порядка $(\partial^p \mathbf{H} / \partial x_3^p)^+$ и подставив их в ряд (2), запишем:

$$\begin{pmatrix} H_1^- \\ H_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1^+ \\ H_2^+ \end{pmatrix} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^{2p+1}}{(2p+1)!} D^p \begin{pmatrix} I_2^+ + H_{3,1}^+ \\ I_1^+ + H_{3,2}^+ \end{pmatrix} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^{2p+2}}{(2p+2)!} \begin{pmatrix} (k^2 - \Delta_s) H_1^+ - \epsilon_{1,2} / \epsilon I_3^+ \\ (k^2 - \Delta_s) H_2^+ + \epsilon_{1,1} / \epsilon I_3^+ \end{pmatrix}, \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} H_3^- = H_3^+ + d \nabla_s \cdot \left\{ \begin{pmatrix} H_1^+ \\ H_2^+ \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d^{2p}}{(2p+1)!} D^{p-1} \begin{pmatrix} (k^2 - \Delta_s) H_1^+ - \epsilon_{1,2} / \epsilon I_3^+ \\ (k^2 - \Delta_s) H_2^+ + \epsilon_{1,1} / \epsilon I_3^+ \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^{2p+1}}{(2p+2)!} D^p \begin{pmatrix} I_2^+ + H_{3,1}^+ \\ -I_1^+ + H_{3,2}^+ \end{pmatrix} \right\}. \quad (4b) \end{aligned}$$

Здесь D — матричный дифференциальный оператор, включающий только горизонтальные производные поля и ϵ :

$$D = \begin{pmatrix} k^2 - \Delta_s + \frac{\epsilon_{1,2}}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\epsilon_{1,2}}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\epsilon_{1,1}}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_2} & k^2 - \Delta_s + \frac{\epsilon_{1,1}}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix},$$

Δ_s и ∇_s — операторы «горизонтального» дифференцирования:

$$\Delta_s = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \nabla_s = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

k — волновое число слоя: $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$; H_α, I_α , ($\alpha = 1, 2, 3$) — проекции векторов \mathbf{H} и \mathbf{I} на ось X_α ; индекс, отделенный запятой, означает дифференцирование по соответствующей координате.

Электрическое поле может быть рассчитано на верхней стороне основания слоя по формуле, вытекающей из 4-го уравнения Максвелла:

$$\mathbf{E}|_{x_3 = -d+0} = \frac{i}{\omega \epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H}|_{x_3 = -d+0}. \quad (5)$$

Отметим, что в силу непрерывности магнитных компонент формула (4) списывает поле \mathbf{H} одновременно как на верхней, так и на нижней стороне основания однородного слоя. Электрическое поле на нижней стороне основания ($x_3 = -d-0$) определяется так:

$$\begin{aligned} E_1^- &= E_1|_{-d-0} = E_1|_{-d+0}, \\ E_2^- &= E_2|_{-d-0} = E_2|_{-d+0}, \\ E_3^- &= E_3|_{-d-0} = \epsilon/\epsilon' \cdot E_3|_{-d+0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, формулы (4)–(6) дают формальное решение задачи о продолжении поля \mathbf{H}, \mathbf{E} с поверхности Земли на кровлю однородного основания ($x_3 = -d-0$), содержащего глубинную неоднородность Q .

Задача продолжения поля в неоднородном слое в общем случае относится к классу некорректных задач. Поэтому непосредственное использование формул (4)–(6) для продолжения практически измеренных электромагнитных полей может привести к резкому усилению погрешностей наблюдения, неустойчивому решению задачи. При практическом применении соотношений (4)–(6) необходимо использовать те или иные приемы

регуляризации полученного решения [14–16]. Простейший метод регуляризации в рассматриваемом случае состоит в ограничении числа членов в соответствующих разложениях Тейлора. Выбор числа N членов, оставляемых в этих рядах, как обычно, производится на основании соответствующих критериев «оптимальности», использующих информацию о свойствах измеренных полей и помехи [15]. Интересно отметить, что в данном случае выбор той или иной длины тейлоровских разложений допускает наглядное физическое истолкование. Например, ограничимся в рядах (4)–(6) только членами, содержащими произведения 1-й степени d на электрическое поле:

$$\begin{cases} H_1^- = H_1^+ - i\omega \varepsilon d E_2^+, \\ H_2^- = H_2^+ + i\omega \varepsilon d E_1^+, \\ H_3^- = H_3^+, \end{cases} \quad (7a)$$

$$\begin{cases} E_1^- = E_1^+, \\ E_2^- = E_2^+, \\ E_3^- = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_3^+ - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial(\varepsilon d E_1^+)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\varepsilon d E_2^+)}{\partial x_2} \right). \end{cases} \quad (7b)$$

Введем обозначения:

$$\varepsilon d = \Sigma, \quad I_\alpha^s = -i\omega \Sigma E_\alpha^+, \quad \alpha = 1, 2. \quad (8)$$

Тогда формулы (7) перепишутся в виде:

$$H_1^- = H_1^+ + I_2^s, \quad H_2^- = H_2^+ - I_1^s, \quad H_3^- = H_3^+, \quad (9)$$

$$E_1^- = E_1^+, \quad E_2^- = E_2^+, \quad E_3^- = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_3^+ - \frac{i}{\omega \varepsilon} (I_{1,1}^s + I_{2,2}^s).$$

Формулы (9) внешне в точности эквивалентны граничным условиям Прайса – Шейнмана на тонкой проводящей пленке [17–18]. При этом произведение $\varepsilon d = \Sigma$ имеет смысл поверхностной комплексной диэлектрической проницаемости пленки, а $I^s = (I_1^s, I_2^s)$ – плотности поверхностного тока. Как известно, условия Прайса – Шейнмана выполняются строго при сжимании тонкого слоя в пленку: $d \rightarrow 0$, причем так, что $\lim_{d \rightarrow 0} \varepsilon d = \Sigma$.

Таким образом, оставление только членов (7a, б) в разложениях (4)–(6) физически эквивалентно замене слоя конечной толщины d бесконечно тонкой проводящей пленкой с поверхностной проницаемостью Σ . Аналогично, сохранение в рядах (4)–(6) членов, содержащих только первую степень d , приводит нас к условиям Дмитриева [19], справедливым в предположении малости толщины слоя по сравнению с длиной волны и медленности горизонтальных изменений ε . В общем случае переход от бесконечных рядов (4)–(6) к их конечным отрезкам длины N можно физически интерпретировать как соответствующее «сжатие» поверхностного слоя с пропорциональным увеличением его проницаемости, допускающее пренебрежение членами более высоких порядков. Продолжение поля с помощью таких «укороченных» рядов является устойчивой операцией.

После того как определены полные поля H^- , E^- на уровне $x_3 = -d = 0$, т. е. на кровле однородного основания, проблема выделения первичных глубинных аномалий сводится, согласно [13], к квадратурам:

$$H_{\hat{\alpha}}^Q = \frac{1}{2} H_{\hat{\alpha}}^- + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ G_{,\alpha} H_3^- + i\omega (-1)^m \hat{\alpha} G E_{m\hat{\alpha}}^{-1} \right\} dy_1 dy_2, \quad \hat{\alpha} \neq 3 \quad (10)$$

$$H_3^Q = \frac{1}{2} H_3^- + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{G_{,1} H_1^- + G_{,2} H_2^-\} dy_1 dy_2,$$

$$\text{где } m_{\hat{\alpha}} = \begin{cases} 1, & \alpha=2, \\ 2, & \alpha=1, \end{cases} \quad x_3 = y_3 = -d.$$

Здесь $G = G(x, y) = \frac{1}{|x-y|} \exp(ik|x-y|)$ — функция Грина однородного пространства. Формулы (10) вытекают из формул (51) работы [13]. При этом учтено, что при условии $x_3 = y_3 = -d$ вертикальная производная функции Грина $G_{,3} = 0$ (этот момент не был отмечен в работе [13]). Соответствующие формулы для электрических компонент первичных глубинных аномалий получаются из (10) заменой Π на E , E на Π и ϵ на $(-\mu)$. Таким образом, задача выделения первичных глубинных аномалий решена. Важно подчеркнуть, что остаточные части полного поля

$$\Pi_{\text{ост}} = \Pi - \Pi^Q, \quad E_{\text{ост}} = E - E^Q$$

всюду ниже поверхностного слоя удовлетворяют однородным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta \Pi_{\text{ост}} + k^2 \Pi_{\text{ост}} = 0,$$

$$x_3 < -d$$

$$\Delta E_{\text{ост}} + k^2 E_{\text{ост}} = 0,$$

и убывают с глубиной. Следовательно, остаточные поля не имеют особых точек ниже неоднородного слоя. Особенности суммарного поля, обусловленные глубиной неоднородностью Q , связаны теперь исключительно с первичными глубинными аномалиями Π^Q , E^Q . Таким образом, поле Π^Q , E^Q несет в себе всю информацию о глубинных неоднородностях. Именно это поле мы и будем в дальнейшем изучать, используя аппарат аналитического продолжения.

§ 2. ОПИСАНИЕ ПЕРВИЧНЫХ ГЛУБИНЫХ АНОМАЛИЙ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ АНАЛОГОВ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОНИ

В дальнейшем при изучении глубинных аномалий ограничимся рассмотрением частного, но достаточно важного для геоэлектрики случая, когда глубинные неоднородности характеризуются бесконечно высокой проводимостью. В этом случае первичное глубинное аномальное поле возбуждается поверхностными электрическими токами I^M , текущими по поверхности M проводящего тела Q , причем распределение этих токов определяется как сторонними источниками поля J^P и поверхностными неоднородностями ϵ , так и формой глубиной неоднородности Q . При известных I^M и поверхности M первичные глубинные аномалии могут быть вычислены по формулам [20]:

$$\Pi_k^Q(x) = \iint_M \Gamma_{k\alpha}(x, y) I_\alpha^M(y) dS_y,$$

$$E_k^Q(x) = - \iint_M \frac{i}{\omega \epsilon} \epsilon_{m\alpha} \Gamma_{k\alpha, m}(x, y) I_\alpha^M(y) dS_y,$$

где $\Gamma_{k\alpha}(x, y)$ — тензор Грина для уравнения Гельмгольца

$$\Gamma_{k\alpha}(x, y) = - \frac{1}{4\pi} \epsilon_{k\alpha} G_{,s}(x, y);$$

$\varepsilon_{m\alpha}$ — кососимметричный символ Кронекера:

$$\begin{cases} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1, \\ \text{все остальные } \varepsilon_{m\alpha} = 0. \end{cases}$$

Формулы (11) являются частным случаем интегралов, описывающих электромагнитные поля поверхностных токов [20]:

$$\mathcal{H}_h(x) = \iint_{\gamma} \left\{ \Gamma_{h\alpha}(x, y) \mathcal{F}_\alpha(y) + \frac{i}{\omega\mu} \varepsilon_{m\alpha} \Gamma_{h\alpha, m}(x, y) \Omega_l(y) \right\} dS_y, \quad (13)$$

$$\mathcal{E}_h(x) = \iint_{\gamma} \left\{ \Gamma_{h\alpha}(x, y) \Omega_\alpha(y) - \frac{i}{\omega\varepsilon} \varepsilon_{m\alpha} \Gamma_{h\alpha, m}(x, y) \mathcal{F}_l(y) \right\} dS_y. \quad (14)$$

Здесь \mathcal{F} и Ω — поверхностные электрические и магнитные токи, текущие вдоль гладкой ориентированной поверхности γ (не обязательно замкнутой). Важно подчеркнуть, что при любом способе задания непрерывных функций \mathcal{F} и Ω вдоль поверхности γ поля $\mathcal{H}_h(x)$, $\mathcal{E}_h(x)$ определены всюду вне γ и удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \varepsilon_{h\alpha} \mathcal{H}_{\alpha, s} = -i\omega\varepsilon \mathcal{E}_h, \\ \varepsilon_{h\alpha} \mathcal{E}_{\alpha, s} = i\omega\mu \mathcal{H}_h. \end{cases} \quad (15)$$

При $x \in \gamma$ интегралы (13), (14) не имеют смысла (расходятся), т. е. поверхность γ является для функций, описываемых этими интегралами, особой поверхностью. В то же время можно вычислить предельные значения интегралов (13), (14) при приближении к поверхности γ с разных ее сторон. Однако эти предельные значения различны, т. е. при переходе через поверхность γ происходит скачок. Величина скачка пропорциональна функциям \mathcal{F} и Ω , стоящим в подынтегральных выражениях:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha l} [\mathcal{H}_\alpha^+(x_0) - \mathcal{H}_\alpha^-(x_0)] \nu_l(x_0) &= \mathcal{F}_\alpha(x_0), \\ \varepsilon_{\alpha l} [\mathcal{E}_\alpha^+(x_0) - \mathcal{E}_\alpha^-(x_0)] \nu_l(x_0) &= \Omega_\alpha(x_0), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathcal{H}_\alpha^+(x_0)$, $\mathcal{E}_\alpha^+(x_0)$ — предельные значения интегралов (13), (14) при приближении к точке x_0 с положительной стороны поверхности γ , $\mathcal{H}_\alpha^-(x_0)$, $\mathcal{E}_\alpha^-(x_0)$ — то же при приближении к поверхности γ с отрицательной стороны; $\nu(x_0)$ — единичный вектор положительной нормали к поверхности γ в точке x_0 . Наконец, если γ — замкнутая поверхность, ограничивающая область D , а функции Ω и \mathcal{F} — граничные значения на γ тангенциальных компонент электрического и магнитного полей E , H , возбуждаемых влещными по отношению к D источниками

$$\Omega = [E, \nu]_\gamma, \quad \mathcal{F} = [H, \nu]_\gamma,$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_h(x) &= \begin{cases} 0, & x \notin D + \gamma, \\ E_h(x), & x \in D, \end{cases} \\ \mathcal{E}_h(x) &= \begin{cases} 0, & x \notin D + \gamma, \\ H_h(x), & x \in D, \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, функции $\mathcal{H}_h(x)$, $\mathcal{E}_h(x)$ обладают практически всеми свойствами, характерными для интегралов типа Коши [21] и гармонических аналогов интегралов типа Коши [22]. Учитывая это, выражения типа (13), (14) мы будем в дальнейшем называть электродинамическими аналогами интегралов типа Коши, а функции Ω и \mathcal{F} — их магнитными и электрическими плотностями. Формулы (16) при этом можно интерпретировать как электродинамические аналоги формул Сохоцкого — Пломеля.

Сравнение (11) с (13), (14) показывает, что первичные глубинные аномалии описываются электродинамическими аналогами интегралов типа Коши с пулевой магнитной плотностью $\Omega=0$ и электрической плотностью, равной $\mathcal{F}=\Gamma^M$. Следовательно, исследование аналитического продолжения первичных глубинных аномалий может основываться на теории интегралов типа Коши.

§ 3. ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ «АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ» ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

При введении понятия «аналитическое продолжение» в теории функций комплексного переменного (т.ф.к.п.) обычно пользуются двумя определениями. Первое определение основывается на разложении комплексно-аналитической функции в степенные ряды (продолжение по Вейерштрассе [23]). Второе определение опирается на теорему Пенлеве, утверждающую, что если $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — две функции, аналитические в замкнутых областях D_1 и D_2 , соприкасающихся вдоль гладкой линии L , и принимающие на L одинаковые значения, то каждая из этих функций является аналитическим продолжением другой за линию L [24].

Покажем, что и теория продолжения электромагнитных полей в однородной изотропной среде [5, 6] может основываться на двух определениях. Первый подход по аналогии с т.ф.к.п. базируется на разложении электромагнитного поля в степенные ряды. Возможность такого разложения немедленно следует, в частности, из выражений (17), показывающих, что любое электромагнитное поле в области однородности среды может быть представлено интегралом типа Коши. Разлагая тензор Грина в (17) в степенной ряд, получаем искомые разложения для электромагнитного поля.

Второй подход к проблеме продолжения может опираться на следующую теорему, являющуюся электромагнитным аналогом теоремы Пенлеве.

Теорема 1. Рассмотрим произвольную область D пространства, ограниченную гладкой поверхностью S и разделенную гладкой поверхностью C на две подобласти D_1 и D_2 . Пусть векторные поля $h^{(1)}, e^{(1)}$ и $h^{(2)}, e^{(2)}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла (15) в замкнутых областях \bar{D}_1 и \bar{D}_2 соответственно. Если вдоль поверхности C тангенциальные компоненты векторов $h^{(1)}$ и $h^{(2)}, e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ равны между собой, то каждая пара из этих векторных полей является аналитическим продолжением другой через поверхность C .

Доказательство. Обозначим через S_1 и S_2 части поверхности S , ограничивающие области D_1 и D_2 соответственно (рис. 2), и рассмотрим следующие функции:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_h(\omega) = & \iint_{S_1} \left\{ \Gamma_{h\alpha} \mathcal{F}_\alpha^{(1)} + \frac{i}{\omega\mu} \varepsilon_{m\alpha} \Gamma_{h\alpha, m} \Omega_l^{(1)} \right\} dS_\nu + \\ & + \iint_{S_2} \left\{ \Gamma_{h\alpha} \mathcal{F}_\alpha^{(2)} + \frac{i}{\omega\mu} \varepsilon_{m\alpha} \Gamma_{h\alpha, m} \Omega_l^{(2)} \right\} dS_\nu, \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h(x) = & \iint_{S_1} \left\{ \Gamma_{h\alpha} \Omega_\alpha^{(1)} - \frac{i}{\omega\varepsilon} \varepsilon_{m\alpha} \Gamma_{h\alpha, m} \mathcal{F}_l^{(1)} \right\} dS_\nu + \\ & + \iint_{S_2} \left\{ \Gamma_{h\alpha} \Omega_\alpha^{(2)} - \frac{i}{\omega\varepsilon} \varepsilon_{m\alpha} \Gamma_{h\alpha, m} \mathcal{F}_l^{(2)} \right\} dS_\nu, \end{aligned} \quad (18b)$$

где

$$\begin{aligned} [h^{(1,2)}, \nu]_S &= \mathcal{F}^{(1,2)}, \\ [e^{(1,2)}, \nu]_S &= \Omega^{(1,2)}, \end{aligned} \quad (19)$$

ν — единичный вектор внешней нормали к S . Функции $\mathcal{H}_k(x)$ и $\mathcal{E}_k(x)$ как суммы двух интегралов типа Коши удовлетворяют внутри S уравнениям Максвелла и, следовательно, являются внутри S аналитическими функциями.

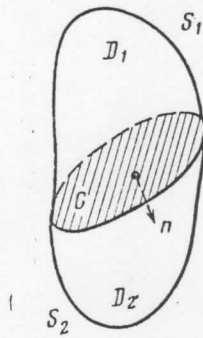


Рис. 2

Пусть n — единичный вектор нормали к поверхности C , направленный в сторону D_2 . Доопределим $\mathcal{F}^{(1,2)}(y)$ и $\Omega^{(1,2)}(y)$ при $y \in C$ следующим образом

$$\begin{aligned} [h^{(1)}, n]_C &= \mathcal{F}^{(1)}, & [h^{(2)}, n]_C &= -\mathcal{F}^{(2)}, \\ [e^{(1)}, n]_C &= \Omega^{(1)}, & [e^{(2)}, n]_C &= -\Omega^{(2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

В силу условия теоремы

$$\mathcal{F}^{(1)}(y) = -\mathcal{F}^{(2)}(y), \quad \Omega^{(1)}(y) = -\Omega^{(2)}(y) \quad \text{при } y \in C. \quad (21)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \iint_C \left\{ \Gamma_{h\alpha} \mathcal{F}_\alpha^{(1)} + \frac{i}{\omega\mu} \varepsilon_{m\alpha} \Gamma_{h\alpha, m} \Omega_l^{(1)} \right\} dS_\nu + \\ & + \iint_C \left\{ \Gamma_{h\alpha} \mathcal{F}_\alpha^{(2)} + \frac{i}{\omega\mu} \varepsilon_{m\alpha} \Gamma_{h\alpha, m} \Omega_l^{(2)} \right\} dS_\nu = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку выражение (22) равно нулю, то его можно прибавить к правой части (18а), не нарушив равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_k(x) &= \iint_{S_1+C} \left\{ \Gamma_{h\alpha} \mathcal{F}_\alpha^{(1)} + \frac{i}{\omega\mu} \varepsilon_{m\alpha} \Gamma_{h\alpha, m} \Omega_l^{(1)} \right\} dS_\nu + \\ & + \iint_{S_2+C} \left\{ \Gamma_{h\alpha} \mathcal{F}_\alpha^{(2)} + \frac{i}{\omega\mu} \varepsilon_{m\alpha} \Gamma_{h\alpha, m} \Omega_l^{(2)} \right\} dS_\nu. \end{aligned} \quad (23)$$

Функции $h^{(1)}$, $e^{(1)}$ и $h^{(2)}$, $e^{(2)}$, согласно условию теоремы, удовлетворяют уравнениям Максвелла соответственно в областях D_1 и D_2 . Тогда в силу свойства (17) интегралов типа Коши находим

$$\mathcal{H}_k(x) = \begin{cases} h_k^{(1)}(x), & x \in D_1, \\ h_k^{(2)}(x), & x \in D_2, \end{cases} \quad (24)$$

Аналогично

$$\mathcal{E}_k(x) = \begin{cases} e_k^{(1)}(x), & x \in D_1, \\ e_k^{(2)}(x), & x \in D_2, \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом, поля $h^{(1)}$, $e^{(1)}$ и $h^{(2)}$, $e^{(2)}$ являются частями функций $\mathcal{H}_\lambda(x)$, $\mathcal{E}_\lambda(x)$, описывающих внутри S одно и то же электромагнитное поле. Следовательно, эти поля могут быть получены одно из другого с помощью аналитического продолжения. Тем самым теорема доказана.

Отметим, что задачам аналитического продолжения электромагнитного поля в геоэлектрике (как и в гравимагниторазведке) больше соответствует первое определение, позволяющее продолжать поля во все более далекие области нижнего полупространства, где сосредоточены эффективные источники аномалий. Такое продолжение по аналогии с т.ф.к.п. естественно называть аналитическим продолжением электромагнитного поля в смысле Вейерштрассе.

Второй подход к продолжению, обобщающий на электромагнитное поле определение Пенлеве, удобен при решении конкретных задач аналитического продолжения. Этим определением мы будем широко пользоваться в дальнейшем.

§ 4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ АНАЛОГОВ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ ЧЕРЕЗ ПОВЕРХНОСТЬ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Поверхность интегрирования, как уже отмечалось в § 3, является особой поверхностью для функций, описываемых интегралами типа Коши. В то же время в ряде случаев оказывается возможным аналитически продолжить электродинамические аналоги интегралов типа Коши через поверхность интегрирования. Выясним, в каких ситуациях это возможно и где находятся особенности такого продолжения.

Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение, вытекающее из теоремы Коши — Ковалевской. Рассмотрим некоторую гладкую ориентированную поверхность S в однородном изотропном пространстве, вдоль которой текут поверхностные электрический \mathcal{I} и магнитный Ω токи. Будем предполагать, что компоненты полей \mathcal{I} и Ω описываются на поверхности S аналитическими функциями. Тогда, если в окрестности точки $x \in S$ поверхность S аналитическая, то можно найти в некоторой окрестности данной точки x голоморфные интегралы уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \varepsilon_{kl\alpha} U_{\alpha, l} = -i\omega \varepsilon V_{\alpha, k}, \\ \varepsilon_{kl\alpha} V_{\alpha, l} = i\omega \mu U_{\alpha, k}, \end{cases} \quad (26)$$

удовлетворяющие на поверхности S следующим граничным условиям:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} U_{\beta} v_{\gamma} = \mathcal{I}_{\alpha}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V_{\beta} v_{\gamma} = \Omega_{\alpha}, \quad (27)$$

где \mathbf{v} — единичный вектор положительной нормали. Действительно, будем решать уравнения (26) с помощью векторного потенциала A , используя калибровку Кулона:

$$\begin{cases} U_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\gamma, \beta}, \\ V_{\alpha} = i\omega \mu A_{\alpha}, \\ \sum_{k=1}^3 A_{k, k} = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Все декартовы компоненты векторного потенциала A удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta A_{\alpha} + k^2 A_{\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (29)$$

Аналогично тому, как это сделано в [25] для уравнения Лапласа, можно показать, опираясь на теорему Коши — Ковалевской, что в окрестности

точки x существуют голоморфные интегралы A_1, A_2, A_3 уравнений (29), удовлетворяющие на поверхности S условиям:

$$A_\alpha|_S = \varphi_\alpha, \quad \left. \frac{\partial A_\alpha}{\partial \nu} \right|_S = \Psi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (30)$$

где $\varphi_\alpha, \Psi_\alpha$ — произвольные функции, голоморфные на S в окрестности точки x .

Поместим начало декартовой системы координат X_1, X_2, X_3 в точку x и направим ось X_3 вдоль ν . Тогда оси X_1 и X_2 окажутся лежащими в касательной плоскости к поверхности S в точке x . Определим функции φ_α и Ψ_α в точке x следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{-1}{i\omega\mu} \Omega_2(x), \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{i\omega\mu} \Omega_1(x), \\ \varphi_3(x) &= \frac{1}{k^2} [\mathcal{F}_{1,1}(x) + \mathcal{F}_{2,2}(x)], \\ \Psi_1(x) &= \frac{1}{k^2} [\mathcal{F}_{1,11}(x) + \mathcal{F}_{2,12}(x)] + \mathcal{F}_1(x), \\ \Psi_2(x) &= \frac{1}{k^2} [\mathcal{F}_{1,21}(x) + \mathcal{F}_{2,22}(x)] - \mathcal{F}_2(x), \\ \Psi_3(x) &= \frac{1}{i\omega\mu} [\Omega_{2,1}(x) - \Omega_{1,2}(x)], \end{aligned} \right. \quad (31)$$

где индекс, отделенный запятой, означает дифференцирование по соответствующей координате. Аналогичным образом определим функции $\varphi_\alpha(x)$ и $\Psi_\alpha(x)$ в любой точке выделенного участка поверхности S . Очевидно, что в силу аналитичности поверхностных токов \mathcal{F}, Ω функции $\varphi_\alpha, \Psi_\alpha$ также аналитичны на S . Тогда нетрудно убедиться, что голоморфные поля U, V , определяемые согласно (28) потенциалом A , удовлетворяют в окрестности точки x уравнению (26) и граничным условиям (27), что и требовалось доказать. Этот результат позволяет непосредственно решить задачу об аналитическом продолжении интегралов (13), (14) через поверхность интегрирования.

Теорема 2. Если в некоторой окрестности точки $x_0 \in S$ поверхность S — аналитическая и поверхностные магнитные Ω и электрические \mathcal{F} токи определяются аналитическими функциями, то электродинамические аналогичные интегралы типа Коши (13), (14) с плотностями Ω и \mathcal{F} могут быть аналитически продолжены через поверхность S с любой ее стороны в указанной окрестности точки x_0 .

Доказательство. Обозначим заданный аналитический кусок поверхности S через S_0 . Тогда, согласно свойству (16) интегралов типа Коши,

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} [\mathcal{H}_\beta^+(x) - \mathcal{H}_\beta^-(x)] \nu_l(x) &= \mathcal{F}_\alpha(x), \\ e_{\alpha\beta} [\mathcal{E}_\beta^+(x) - \mathcal{E}_\beta^-(x)] \nu_l(x) &= \Omega_\alpha(x), \\ x &\in S_0. \end{aligned} \quad (32)$$

Как было показано выше, в окрестности поверхности S_0 всегда существует электромагнитное поле U, V , удовлетворяющее на S_0 граничным условиям (27). С учетом этого перенесем (32)

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} \mathcal{H}_\beta^+(x) \nu_l(x) &= e_{\alpha\beta} \mathcal{H}_\beta^-(x) \nu_l(x) + e_{\alpha\beta} U_\beta(x) \nu_l(x), \\ e_{\alpha\beta} \mathcal{E}_\beta^+(x) \nu_l(x) &= e_{\alpha\beta} \mathcal{E}_\beta^-(x) \nu_l(x) + e_{\alpha\beta} V_\beta(x) \nu_l(x). \end{aligned} \quad (33)$$

Очевидно, что правая часть (33) представляет собой граничные значения на S_0 тангенциальных компонент полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла в некоторой области, примыкающей к отрицательной стороне поверхности S_0 . Левая часть (33) описывает граничные значения тангенциальных компонент полей, подчиняющихся уравнениям Максвелла в области, примыкающей к положительной стороне S_0 . Следовательно, по теореме 1 правая часть представляет собой аналитическое продолжение левой через поверхность S_0 в направлении, противоположном ν . Аналогично доказывается возможность аналитического продолжения интегралов типа Коши через поверхность S_0 с отрицательной ее стороны.

Из формул (33) и теоремы 1 следует, что продолженные через поверхность S значения интегралов типа Коши $\mathcal{H}_\alpha^{np}(x)$, $\mathcal{E}_\alpha^{np}(x)$ отличаются от самих интегралов $\mathcal{H}_\alpha(x)$, $\mathcal{E}_\alpha(x)$ на величину, равную полям $U_\alpha(x)$, $V_\alpha(x)$, соответственно

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\alpha^{np}(x) - \mathcal{H}_\alpha(x) &= U_\alpha(x), \\ \mathcal{E}_\alpha^{np}(x) - \mathcal{E}_\alpha(x) &= V_\alpha(x). \end{aligned} \quad (34)$$

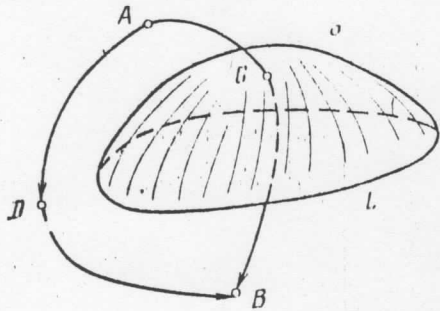


Рис. 3

Отсюда вытекают два следствия. Во-первых, особые точки $\mathcal{H}_\alpha^{np}(x)$, $\mathcal{E}_\alpha^{np}(x)$ совпадают с особыми точками полей $U_\alpha(x)$, $V_\alpha(x)$. Во-вторых, контур L , ограничивающий аналитическую поверхность S , является линией ветвления для электродинамических аналогов интегралов типа Коши. Действительно, продолжив поле $\mathcal{H}_\alpha(x)$ из точки A в точку B (рис. 3) вдоль пути ADB , не пересекая поверхность S , мы придем к значению $\mathcal{H}_\alpha(B)$, а продолжив $\mathcal{H}_\alpha(x)$ вдоль пути ACB , пересекая S , получим другое значение поля $[\mathcal{H}_\alpha(B) + U_\alpha(B)]$. Если поверхность S состоит из нескольких различных аналитических кусков, то линии смыкания этих кусков являются линиями ветвления для соответствующих электромагнитных полей.

§ 5. СВЯЗЬ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ ПРОВОДИЩИХ ТЕЛ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ АНАЛИТИЧЕСКИ ПРОДОЛЖЕННЫХ АНОМАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

В § 2 отмечено, что первичные глубинные аномалии, обусловленные проводящими телами с $\sigma \rightarrow \infty$, могут быть представлены в виде электродинамических аналогов интегралов типа Коши с нулевой магнитной плотностью $\Omega_\alpha(x) = 0$ и электрической плотностью $\mathcal{I}_\alpha(x) = I_\alpha^M(x)$. Можно показать, что плотность электрических токов, текущих вдоль аналитических кусков поверхности M , ограничивающей неоднородность Q , описывается аналитическими функциями. Доказательство этого положения основывается на том факте, что токи, текущие вдоль плоских экранов, как известно, аналитичны [20]. В то же время любой элемент аналитической поверхности M в окрестности данной точки может быть аппроксимирован плоским экраном. Таким образом, согласно результатам § 4, первичные глубинные аномалии могут быть продолжены через аналитические куски поверхности M . При этом линии соприкосновения различных аналитических кусков являются особыми линиями для аналитического продолжения поля. Сложнее обстоит дело с особыми точками поля, продолженного сквозь границу неоднородности. Действительно, особые точки продолженного поля совпадают с особыми точками функций $U_\alpha(x)$, $V_\alpha(x)$, граничными значениями которых на M служат токи I_α^M , $\Omega_\alpha = 0$. Ясно, что функ-

ции $U_\alpha(x)$, $V_\alpha(x)$ целиком определяются токами I_α^M , зависящими, в свою очередь, от распределения сторонних токов j^P , поверхностных неоднородностей $\epsilon(x_1, x_2)$ и формы области Q . Следовательно, расположение в пространстве и тип особенностей продолженных сквозь границы неоднородностей аномалий связаны не только с формой исследуемой глубинной неоднородности Q , но и с j^P и ϵ . Таким образом, наиболее полезными с точки зрения интерпретации являются особенности поля, приуроченные к линиям соприкосновения различных аналитических кусков поверхности M . Эти кривые всегда проявляются в виде особых линий аналитически продолженного поля и связаны только с геометрией глубинных неоднородностей.

Отметим, что все вышесказанное справедливо и для глубинных неоднородностей, аппроксимированных идеально проводящими экранами произвольной формы. Рассмотрим в качестве примера в однородной среде с параметрами ϵ, μ плоский идеально проводящий экран S , ограниченный контуром L (рис. 4). Предположим, что электромагнитное поле возбуждается электрическим диполем, помещенным в точку P' . Очевидно, что на поверхности экрана выполнено граничное условие

$$E_1|_S = E_2|_S = 0. \quad (35)$$

При этом поверхностный электрический ток определяется

$$\mathcal{F}_1 = H_2|_S, \quad \mathcal{F}_2 = -H_1|_S. \quad (36)$$

Задача дифракции электромагнитного поля на плоском экране, как известно, может быть решена с помощью метода разветвленных решепий Зоммерфельда [20, 26]. Для этого вводится двулистное Риманово пространство, склеенное вдоль экрана S из двух экземпляров трехмерного физического пространства. Причем верхняя сторона разреза в первом экземпляре соединяется с нижней стороной разреза во втором экземпляре и наоборот. Рассматривается двузначное решение уравнений Максвелла H', E' . Оно описывает поле, создаваемое диполем, расположенным в точке P' первого экземпляра трехмерного пространства и распространяющееся во всем двулистном Римановом пространстве. По свойству отражения в плоскости экрана S можно получить второе решение уравнений Максвелла H'', E'' , отвечающее источнику, расположенному во втором экземпляре трехмерного пространства в точке P'' — отражении точки P' . Решение задачи дифракции дается разностью полей (H', E') и (H'', E'') , рассматриваемой в первом экземпляре трехмерного пространства:

$$H = H' - H'', \quad E = E' - E''. \quad (37)$$

Это решение по построению удовлетворяет условию (35), причем поверхностный ток, согласно (36), (37), равен

$$\mathcal{F}_1 = H_2'|_S - H_2''|_S, \quad \mathcal{F}_2 = -H_1'|_S + H_1''|_S. \quad (38)$$

Из способа нахождения решения непосредственно видно, что поле может быть продолжено через любую внутреннюю точку поверхности экрана S .

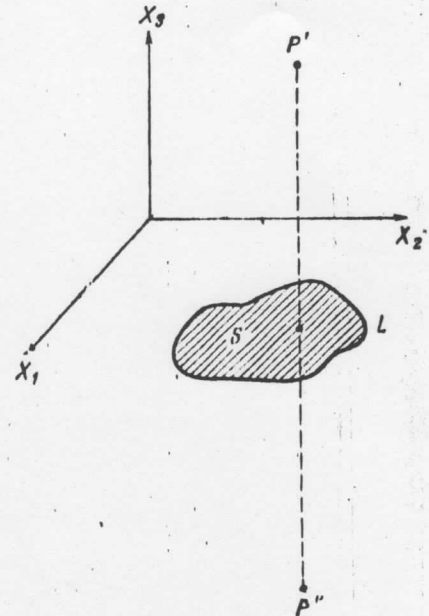


Рис. 4

При этом мы переходим из первого экземпляра трехмерного пространства во второй экземпляр. Особая точка продолженного сквозь экран поля совпадает с точкой P'' — зеркальным отражением источника P' . Кроме того, край экрана L является линией ветвления для электромагнитного поля. Формула (38) показывает, что поверхностный ток \mathcal{J} на экране описывается аналитическими функциями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При интерпретации глубинных электромагнитных аномалий, так же как и в гравимагниторазведке, может быть использован метод аналитического продолжения переменного электромагнитного поля, позволяющий локализовать положение особенностей продолженного поля. При этом тип и расположение в пространстве особых точек, линий и поверхностей аналитически продолженного поля тесно связаны с формой поверхности глубинных неоднородностей. В частности, ребра проводящих тел или край бесконечно тонких экранов являются линиями ветвления поля. Особенности же переменного электромагнитного поля, продолженного через аналитические грани глубинных неоднородностей, определяются не только формой последних, но и распределением сторонних источников поля \mathcal{J} и поверхностными геоэлектрическими неоднородностями ϵ . В этом заключается существенное отличие свойств аналитически продолженного поля в электромагнетизме по сравнению со свойствами аналитически продолженных гравитационных или магнитных полей, особенности которых связаны исключительно с геометрией неоднородности (при постоянной пабыточной плотности или намагниченности) [22].

Московский институт нефтехимической
и газовой промышленности
им. И. М. Губкина

Поступила
8 I 1974

Литература

1. Бердичевский М. П., Жданов М. С., Жданова О. П. О возможности разделения аномалий переменного геомагнитного поля на поверхностные и глубинные. Геомагнетизм и аэрономия, 14, № 4, 1974.
2. Жданов М. С. Выделение глубинных электромагнитных аномалий и интерпретация поверхностных аномалий. Сб. «Прикладная геофизика», вып. 78, 1975.
3. Савоа В. С. и др. Электромагнитные методы разведки в рудной геофизике. М., «Недра», 1966.
4. Рокитянский П. П., Шуман В. П. Магнитовариационное профилирование. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 10, 1970.
5. Жданов М. С. Об аналитическом продолжении трехмерных электромагнитных полей. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 4, 1973.
6. Жданов М. С. Об аналитическом продолжении двумерных электромагнитных полей. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 6, 1973.
7. Бердичевский М. П., Жданов М. С. О продолжении переменного электромагнитного поля в горизонтально неоднородных слоях. Сб. «Геомагнитные исследования», вып. 46, 1975.
8. Жданов М. С., Бердичевский М. П. Нормальные и аномальные поля в многослойной среде. Геомагнетизм и аэрономия, 23, № 6, 1973.
9. Жданов М. С. О едином подходе к проблеме интерпретации геофизических аномалий на основе методов продолжения полей. АН СССР, Геология и геофизика, № 10, 1974.
10. Андреев Б. А. Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике. П. Изв. АН СССР, сер. географии и геофизики, № 3, 1949.
11. Страхов В. П. О путях построения математической теории интерпретации магнитных и гравитационных аномалий. Сб. «Прикладная геофизика», вып. 35. Гостехиздат, 1962.
12. Голиадр Г. Я. О связи особых точек гравитационного потенциала с формой возмущающих масс. Геофиз. сб., № 5 (7). Изд-во АН УССР, 1963.
13. Жданов М. С. Разделение переменных электромагнитных полей Земли. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 8, 1973.
14. Тихонов А. П. О некорректно поставленных задачах. Сб. «Вычислительные методы и программирование». Изд-во МГУ, 1967.

15. *Иванов В. К.* О приближенном решении операторных уравнений I-го рода. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, № 6, 1966.
16. *Страхов В. П.* Теория приближенного решения некорректных задач в гильбертовом пространстве и ее использование в разлодной геофизике. I, II. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 8, 9, 1969.
17. *Price A. T.* The induction of electric currents in nonuniform thin sheets and shells. Quart. J. Mech. Appl. Math., 2, pp. 283-310, 1949.
18. *Шейнман С. М.* Об установлении электромагнитных полей в Земле. Сб. «Прикладная геофизика», вып. 3. Гостехиздат, 1947.
19. *Дмитриса В. П.* О приближенных граничных условиях на тонком неоднородном слое в задачах электроразведки. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 12, 1969.
20. *Хенд Х., Маур А., Вестфаль К.* Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
21. *Мухомедов И. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
22. *Жданов М. С.* Некоторые вопросы теории интерпретации гравитационных аномалий, зависящих от трех пространственных координат. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 9, 1974.
23. *Привалов И. П.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М., «Наука», 1967.
24. *Гурса Д.* Курс математического анализа. II. М.-Л., ОНТИ, 1936.
25. *Среденский Л. П.* Теория плотновского потенциала. ОГИЗ - Гостехиздат, 1946.
26. *Фраук Ф., Милес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, II. М.-Л., ОНТИ, 1937.