АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ГЕОМАГНЕТИЗМ
И
АЭРОНОМИЯ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1980

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ

Том XX 1980 № 3

УДК 550.373

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ МИРОВОГО ОКЕАНА НА ПЕРЕМЕННОЕ ГЕОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ С ПОМОЩЬЮ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

М. С. Жданов

Выведены граничные условия Дмитриева для тонкого неоднородного сферического слоя. На базе этих условий сконструирован метод учета искажающего влияния неоднородного поверхностного слоя, образованного водой океанов и осадочным чехлом континентов, на результаты магнитовариационного зондирования. Предлагаемый метод снимает ограничения модели с бесконечно тонкой пленкой.

Одной из важнейших проблем, стоящих перед современной геоэлектрикой, является учет искажающего влияния приповерхностного неоднородного слоя Земли, образованного водой океанов и осадками континентов, на результаты магнитовариационных наблюдений. Исследования последних лет показали, что многие геомагнитные аномалии, обнаруженные в Европе и Азии с помощью магнитовариационного метода, имеют, скорее, поверхностное, чем глубинное происхождение. Приповерхностные неоднородности существенно искажают кривые как локальных, так и глобальных магнитовариационных зондирований, поэтому формальная интерпретация последних, использующая горизонтально-однородные или сферически-однородные модели, может приводить к построению ложных геоэлектрических структур [1].

Для исключения искажений, обусловленных приповерхностными эффектами, в работе [2] предложен метод, основанный на интегральных преобразованиях поля. При этом приповерхностный неоднородный слой Земли аппроксимировался бесконечно тонкой сферической оболочкой Прайса — Шейнманна [3, 4]. Однако известно, что бесконечно тонкие пленки Прайса — Шейнманна могут приводить к утрированию аномалий, особенно в области высоких градиентов поверхностной проводимости [5]. Более точно поверхностные неоднородности могут быть описаны с помощью модели, использующей граничные условия Дмитриева, которые учитывают конечную толщину приповерхностного слоя [6]. Эти условия получены В. И. Дмитриевым для тонкого горизонтального неоднородного слоя. При анализе влияния Мирового океана на геомагнитное поле необходимо пользоваться сферической моделью, в которой приповерхностные неоднородности представлены сферическим слоем толщины d и переменной электропроводности $\sigma(\varphi, \theta)$, являющейся функцией сферических координат φ и θ. В настоящей работе выводятся условия Дмитриева для тонкого сферического слоя и на базе этих условий конструируется метод учета искажающего влияния неоднородного поверхностного слоя на результаты глубинного магнитовариационного зондирования, снимающий ограничения модели с бесконечно тонкой пленкой.

Начнем анализ с обобщения условий Дмитриева на сферический слой. Пусть квазистационарное электромагнитное поле возбуждается внешними по отношению к сферическому слою источниками. Зависимость поля от времени выразим экспоненциальным множителем $\exp(-i\omega t)$. Магнитная проницаемость повсюду постоянна и равна μ_0. Внутри слоя электрические и магнитные поля удовлетворяют уравнениям:

$$\partial(rH_\varphi)/\partial r=(1/\sin\theta)\,\partial H_r/\partial\varphi-\sigma\cdot rE_\theta,$$
$$\partial(rH_\theta)/\partial r=\partial H_r/\partial\theta+\sigma\cdot rE_\varphi, \tag{1а}$$
$$\partial(rE_\varphi)/\partial r=(1/\sin\theta)\,\partial E_r/\partial\varphi-i\omega\mu_0 rH_\theta,$$
$$\partial(rE_\theta)/\partial r=\partial E_r/\partial\theta+i\omega\mu_0 rH_\varphi. \tag{1б}$$

Следуя работе [6], предполагаем, что поле слабо изменяется по глубине слоя, т. е. что мы находимся от источника на расстоянии, много большем, чем мощность слоя; кроме того, мощность слоя много меньше длины электромагнитной волны в нем. В этом случае можно разложить функции rH_φ, rH_θ, rE_φ, rE_θ в ряд Тейлора по r, ограничиваясь только двумя первыми членами разложения. Воспользовавшись также уравнениями Максвелла (1), записываем условие сопряжения тангенциальных компонент магнитного и электрического полей на внутренней и внешней поверхностях слоя:

$$(R-d)H_\varphi^-=RH_\varphi^+-(d/\sin\theta)\,\partial H_r^+/\partial\varphi+RJ_\theta^+,$$
$$(R-d)H_\theta^-=RH_\theta^+-d\partial H_r^+/\partial\theta-RJ_\varphi^+, \tag{2а}$$
$$(R-d)E_\varphi^-=RE_\varphi^+-(d/\sin\theta)\,\partial E_r^+/\partial\varphi+i\omega\mu_0 RdH_\theta^+,$$
$$(R-d)E_\theta^-=RE_\theta^+-d\partial E_r^+/\partial\theta-i\omega\mu_0 RdH_\varphi^+, \tag{2б}$$

где R — радиус наружной поверхности сферического слоя; $J^+_{\varphi,\theta}=E^+_{\varphi,\theta}\sigma(\varphi,\theta)d$ — тангенциальные компоненты поверхностной плотности тока на ней. Знаками плюс и минус обозначены значения полей на внутренней и внешней границах слоя соответственно.

Согласно второму уравнению Максвелла

$$H_r=\frac{1}{i\omega\mu_0 r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\varphi)-\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right]. \tag{3}$$

Подставляя (2б) в (3), находим условия сопряжения радиальной компоненты магнитного поля на границах слоя:

$$(R-d)^2H_r^-=R^2H_r^+ +\frac{Rd}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta H_\theta^+)+\frac{Rd}{\sin\theta}\frac{\partial H_\varphi^+}{\partial\varphi}. \tag{4}$$

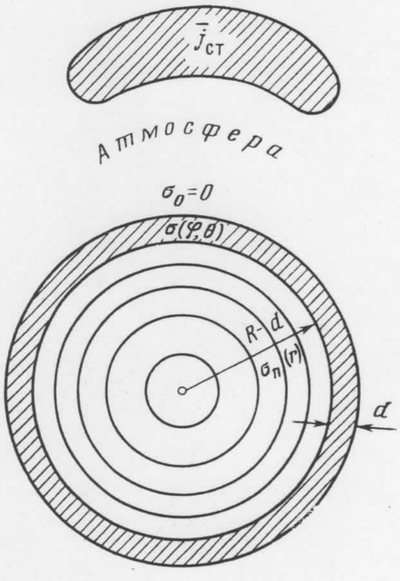
Соотношения (2) и (4) описывают граничные условия Дмитриева на тонком сферически-неоднородном слое толщины d. При неограниченном сжатии слоя с соответствующим увеличением электропроводности (таким, что продольная проводимость слоя $S(\varphi,\theta)=\sigma(r,\theta)d$ остается неизменной: $\lim\sigma(r,\theta)d=S(\varphi,\theta)$, $d\to 0$; $\sigma\to\infty$) условия Дмитриева переходят в обычные условия Прайса — Шейнманна. В частности, для магнитного поля имеем:

$$H_r^-=H_r^+,\ H_\varphi^-=H_\varphi^+ +J_\theta^+,\ H_\theta^-=H_\theta^+ -J_\varphi^+. \tag{5}$$

Воспользуемся условиями Дмитриева для решения задачи об учете искажающего влияния Мирового океана на результаты глобального магнитовариационного зондирования. Рассмотрим модель, изображенную на фиг. 1, где сферическая Земля радиуса R, окруженная непроводящей атмосферой, возбуждается сторонними токами $j_{\text{ст}}$, текущими в ионосфере.

Земля состоит из сферически-однородных слоев с проводимостью $\sigma_n(r)$, окруженных неоднородным приповерхностным сферическим слоем толщиной d и удельной проводимостью $\sigma(\varphi, \theta)$, моделирующим неоднородности океана и осадочного чехла континентов. Слой, непосредственно залегающий под поверхностным, имеет нулевую проводимость. Отметим, что в данной модели магнитное поле как на внешней, так и на внутренней сторонах неоднородного сферического слоя содержит только полоидальную моду, так как этот слой гальванически не связан ни с ионосферой, ни со сферически-симметричной внутренней частью Земли.

Исследования геомагнитного поля на сфере обычно выполняют с помощью сферического гармонического анализа, поэтому прежде всего запишем условия Дмитриева для сферических гармоник поля. Для этого разложим магнитное поле (полоидальную моду) и поверхностную плотность тока на внешней и внутренней поверхностях сферического слоя в ряд по сферическим функциям и их модификациям:



Фиг. 1

$$H_r^{\pm}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} h_r^{\pm} e^{-im\varphi} P_l^m(\cos\theta),$$

$$H_\varphi^{\pm}=-i\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} h_\varphi^{\pm} m e^{-im\varphi}\frac{P_l^m(\cos\theta)}{\sin\theta}, \tag{6}$$

$$H_\theta^{\pm}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} h_\theta^{\pm} e^{-im\varphi}\frac{dP_l^m(\cos\theta)}{d\theta},$$

$$J_\varphi^{+}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} j_\varphi^{+} e^{-im\varphi}\frac{dP_l^m(\cos\theta)}{d\theta}, \tag{7}$$

$$J_\theta^{+}=-i\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} j_\theta^{+} m e^{im\varphi}\frac{P_l^m(\cos\theta)}{\sin\theta},$$

где $h^{+}_{r,\varphi,\theta}=h_{l_{r,\varphi,\theta}}^{m+}$; $j^{+}_{\varphi,\theta}=j_{l_{\varphi,\theta}}^{m+}$ — комплексные амплитуды пространственных гармоник поля и плотности тока степени l и порядка m на внешней (плюс) и внутренней (минус) сторонах слоя соответственно.

Подставляя (6) и (7) в (2а) и (4), получаем следующие граничные условия для пространственных гармоник поля:

$$(R-d)^2 h_r^- = R^2 h_r^+ - Rdh_\theta^+ l(l+1) = R^2 h_r^+ - Rdh_\varphi^+ l(l+1), \tag{8а}$$

$$(R-d)\,h_\varphi^- = Rh_\varphi^+ - dh_r^+ + Rj_\theta^+, \tag{8б}$$

$$(R-d)\,h_\theta^- = Rh_\theta^+ - dh_r^+ - Rj_\varphi^+, \tag{8в}$$

где учтено, что в случае полоидальной моды $h_\varphi = h_\theta$.

Задачу учета влияния Мирового океана на результаты МВЗ можно сформулировать следующим образом: по магнитному полю $\bar{H}^+$, наблюденному на земной поверхности, требуется определить нормальный импеданс

Земли Z_n, т. е. импеданс, зависящий только от $\sigma_n(r)$. Для полоидальной моды магнитный спектральный импеданс определяется следующими формулами [7]:

на внешней стороне слоя:

$$Z^+ = Z^+(\omega, l) = -i\omega\mu_0 \frac{R}{l(l+1)} \frac{h_r^+}{h_\theta^+} = -i\omega\mu_0 \frac{R}{l(l+1)} \frac{h_r^+}{h_\varphi^+}, \tag{9а}$$

на внутренней стороне слоя:

$$Z^- = Z(\omega, l) = -i\omega\mu_0 \frac{R-d}{l(l+1)} \frac{h_r^-}{h_\theta^-} = -i\omega\mu_0 \frac{R-d}{l(l+1)} \frac{h_r^-}{h_\varphi^-}. \tag{9б}$$

В то же время нормальный спектральный импеданс на внешней и внутренней сторонах слоя равен:

$$Z_n^+ = Z_n^+(\omega, l) = -i\omega\mu_0 \frac{R}{l(l+1)} \frac{h_{nr}^+}{h_{n\theta}^+} = -i\omega\mu_0 \frac{l}{l(l+1)} \frac{h_{nr}^+}{h_{n\varphi}^+}, \tag{10а}$$

$$Z_n^- = Z_n^-(\omega, l) = -i\omega\mu_0 \frac{R-d}{l(l+1)} \frac{h_{nr}^-}{h_{n\theta}^-} = -i\omega\mu_0 \frac{R-d}{l(l+1)} \frac{h_{nr}^-}{h_{nr}^-}, \tag{10б}$$

где $h^{\pm}_{n,r,\varphi,\theta}$ — пространственные гармоники нормального магнитного поля при $r=R$ и $r=R-d$ соответственно. Напомним, что нормальным мы называем поле, возбуждаемое в нашей модели при отсутствии приповерхностного неоднородного слоя (т. е. при условии $\sigma(\varphi, \theta)=0$). Таким образом, проблема учета искажающего влияния океана на кривые глобального МВЗ сводится к определению нормального импеданса Z_n^+ по измеренному импедансу Z^+. Решим эту проблему.

Поскольку ниже неоднородного слоя (при $r<R-d$) Земля сферически-однородна и возбуждается только полоидальной модой,

$$Z^- \equiv Z_n^-. \tag{11}$$

Следовательно, для определения соотношения между Z_n^+ и Z^+ достаточно найти связи сначала между Z_n^+ и Z_n^-, а затем между Z^- и Z^+. Вторая из указанных связей находится непосредственно с помощью подстановки граничных условий (8) в (9б):

$$Z^- = -i\omega\mu_0 \frac{R}{R-d} \frac{Z^+ + i\omega\mu_0 d}{-i\omega\mu_0 - i\omega\mu_0 j_\theta^+/h_\theta^+ - l(l+1)(d/R^2)Z^+}. \tag{12}$$

Для установления связи между Z_n^+ и Z^- необходимо переписать условия (8) в виде:

$$R^2 h_{nr}^+ = (R-d)^2 h_{nr}^- + d(R-d) h_{n\theta}^- l(l+1),$$
$$R h_{n\varphi}^+ = (R-d) h_{n\varphi}^- + d h_{nr}^-, \quad R h_{n\theta}^+ = (R-d) h_{n\theta}^- + d h_{nr}^-, \tag{13}$$

где учтено, что в нормальном поле $h_{n\varphi} = h_{n\theta}$ и $j_{\varphi\theta}^{\pm}=0$. Подставляя (13) в (10а), определяем

$$Z_n^+ = -i\omega\mu_0 \frac{Z_n^- - i\omega\mu_0 d}{-i\omega\mu_0 + l(l+1) d (R-d)^{-2} Z_n^-}. \tag{14}$$

Заменяя Z_n^- в (14) через Z^- и используя (12), окончательно находим

$$Z_n^+ = K Z^+, \tag{15}$$

где K — нормализующий множитель, учитывающий влияние неоднородного слоя:

$$K = \left[1 + \frac{d}{R-d} + \frac{d}{R} l(l+1) \frac{j_\theta^+}{h_r^+} - \frac{d^2}{R(R-d)} l(l+1) \frac{h_\theta^+}{h_r^+} + \left(\frac{d}{R}\right)^2 l(l+1)\right] \times$$

$$\times\left\{1+\frac{j_\theta{}^+}{h_\theta{}^+}+\frac{d}{R}\frac{d}{R-d}\left[3\frac{R}{R-d}+\left(\frac{d}{R-d}\right)^2\right]\frac{h_r{}^+}{h_\theta{}^+}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{d}{R-d}\right)^2 l(l+1)\frac{R}{R-d}\right\}^{-1}. \qquad (16)$$

Как видим, в общем случае для определения величины K необходимы данные как о магнитном, так и об электрическом полях на поверхности Земли. Однако на практике мы располагаем обсерваторными данными только о вариациях магнитных компонент поля. Поэтому важно уметь определить величину K по одним магнитовариационным данным. В рассматриваемой модели эта задача может быть решена с помощью введения токовой функции, аналогичной функции Прайса [3]. В самом деле, поскольку приповерхностный неоднородный слой окружен непроводящей атмосферой и лежит на слое-изоляторе, можно выразить магнитное поле на внешней и внутренней поверхностях слоя через скалярные потенциалы:

$$H_\varphi{}^+=(1/R\cdot\sin\theta)\,\partial U^+/\partial\varphi,\quad H_\theta{}^+=(1/R)\,\partial U^+/\partial\theta, \qquad (17а)$$

$$H_\varphi{}^-=\frac{1}{(R-d)\sin\theta}\frac{\partial U^-}{\partial\varphi},\qquad H_\theta{}^-=\frac{1}{R-d}\frac{\partial U^-}{\partial\theta}. \qquad (17б)$$

Подставляя (17) в (2а), получаем:

$$J_\theta{}^+=(1/R\sin\theta)\,\partial\psi/\partial\varphi,\quad J_\varphi{}^+=-R^{-1}\partial\psi/\partial\theta, \qquad (18)$$

где $\psi=U^--U^++dH_r{}^+$ — токовая функция.

Выражая в (3) электрическое поле через ψ, получаем уравнение для токовой функции:

$$i\omega\mu_0R^2H_r{}^+=-\frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta}{S}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right\}, \qquad (19)$$

где $S=S(\varphi,\ \theta)=\sigma(\varphi,\ \theta)\,d$ — продольная проводимость неоднородного слоя.

Разложим ψ в ряд по сферическим функциям:

$$\psi=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\psi_l{}^m e^{-im\varphi}P_l{}^m(\cos\theta). \qquad (20)$$

Подставляя (20) в (19), находим бесконечную систему уравнений для коэффициентов Фурье $\psi_l{}^m$:

$$i\omega\mu_0R^2h_r{}^+=\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{k}\psi_k{}^n\alpha_k{}^n, \qquad (21)$$

где

$$\alpha_k{}^n=\alpha_k{}^n(l,m)=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left\{P_k{}^n(\cos\theta)\left[-\frac{k(k+1)}{S}-\frac{in}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{S}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+n\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{S}\right)\right]-P_k^{n+1}(\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{S}\right)\right\}e^{-i(n-m)\varphi}P_e{}^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\varphi\,d\theta. \qquad (22)$$

Система уравнений (21) позволяет при известных $h_r{}^+$ и $S(\varphi,\ \theta)$ определить $\psi_e{}^m=\psi$ и в соответствии с (18) найти коэффициенты Фурье разложения поверхностного тока:

$$j_\theta{}^+=-j_\varphi{}^+=-R^{-1}\psi. \qquad (23)$$

Отметим, что полученные соотношения (18)—(23) для токовой функции в слое Дмитриева полностью идентичны соответствующим формулам, используемым в пленке Прайса [2, 3].

Подставляя (23) в (16), находим:

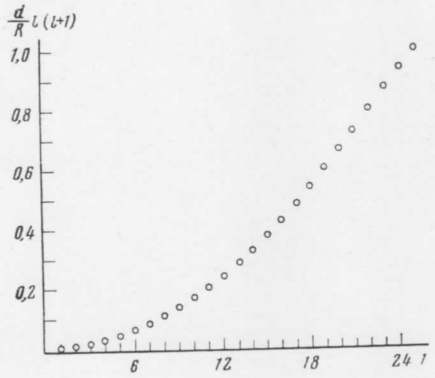
$$K=\left[1+\frac{d}{R-d}-\frac{d}{R}l(l+1)\frac{\psi}{Rh_r^+}-\frac{d^2}{R(R-d)}l(l+1)\frac{h_\theta^+}{h_r^+}+\left(\frac{d}{R}\right)^2 l(l+1)\right]\times$$
$$\times\left\{1-\frac{\psi}{Rh_\theta^+}+\frac{d}{R}\frac{d}{R-d}\left[3\frac{R}{R-d}+\left(\frac{d}{R-d}\right)^2\right]\frac{h_r^+}{h_\theta^+}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{d}{R-d}\right)^2 l(l+1)\frac{R}{R-d}\right\}^{-1}. \qquad (24)$$

Проанализируем выражение (24). При неограниченном сжатии неоднородного поверхностного слоя Дмитриева в бесконечно тонкую пленку Прайса — Шейнманна получаем:

$$K=[1-\psi/(Rh_\theta^+)]^{-1}, \qquad (25)$$

что совпадает с результатом работы [2]. Выражение (24) отличается от (25) членами, содержащими множители d/R, $d/(R-d)$. Оценим эти члены. Радиус Земли $R=6371$ км. Положим $d=10$ км, тогда

$$d/R\approx d/(R-d)\approx 16\cdot 10^{-4},$$
$$(d/R)^2\approx d^2/R(R-d)\approx$$
$$\approx[d/(R-d)]^2\approx 2\cdot 10^{-6}. \qquad (26)$$



Фиг. 2

Как видим, сами по себе множители d/R, $d/(R-d)$ и их квадраты малы, поэтому содержащими их слагаемыми в формуле (24) можно пренебречь, за исключением тех, где эти множители умножаются на $l(l+1)$. Если учесть также, что с точностью 0,1% $R/(R-d)\approx 1$, выражение (24) можно переписать:

$$K=\frac{1-(d/R)\,l(l+1)\,\psi/Rh_r^+ + (d^2/R^2)\,l(l+1)\,[1-h_\theta^+/h_r^+]}{1-\psi/(Rh_\theta^+)-(d/R)^2 l(l+1)}. \qquad (27)$$

Кроме того, очевидно, что вклад в (27) членов, содержащих $(d/R)^2$, пренебрежимо мал по сравнению со слагаемыми с d/R, поэтому выражение для K можно еще более упростить:

$$K=[1-(d/R)\,l(l+1)\,\psi/(Rh_r^+)]\,[1-\psi/(Rh_\theta^+)]^{-1}. \qquad (28)$$

График зависимости коэффициента $(d/R)\,l(l+1)$ от l — степени сферической гармоники представлен на фиг. 2. Как видим, величина этого коэффициента для гармоник со степенью $l=10$ и более может стать существенной. Таким образом, на относительно высоких гармониках поля (начиная с 10-й) различия в моделях Прайса — Шейнманна и Дмитриева могут проявляться достаточно сильно. Физически это представляется почти очевидным, поскольку известно, что модель Прайса — Шейнманна наиболее сильно искажает (утрирует) аномальное поле в случае высоких горизонтальных градиентов поля и продольной проводимости, которые присутствуют именно в сферических гармониках высокой степени. Для гармоник низкой степени ($l<10$) выражение (28) практически совпадает с (25), т. е. в этой ситуации слой Дмитриева эквивалентен пленке Прайса — Шейнманна. Следует заметить, однако, что поскольку в формулу (28) выражение $(d/R)l(l+1)$ входит не самостоятельно, а в виде множителя перед функцией $\psi/(Rh_r^+)$, определяемой экспериментально, то ясно, что окончательный ответ на вопрос об областях применимости моделей Прайса — Шейнманна и Дмитриева может дать лишь численный эксперимент.

Полученные в работе соотношения в совокупности с формулами работы [2] могут быть положены в основу методики исключения искажающего влияния геоэлектрических неоднородностей Мирового океана и осадочного чехла континентов на результаты магнитовариационного зондирования Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. W. Berdichevsky, V. I. Dmitriev. Acta Geodaet. Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., 1976, **11**, 447.
2. М. С. Жданов, М. Н. Бердичевский. Геомагнетизм и аэрономия, 1973, **13**, 958.
3. A. T. Price. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1949, **2**, 283.
4. С. М. Шейнманн. Прикладная геофизика, 1947, вып. 3, 37.
5. U. Schmucker. Anomalies of geomagnetic variations in the South-Western United States. Bull. Scripps. Inst. Oceanogr. Univ. Calif., 13, 1970.
6. В. И. Дмитриев. Изв. АН СССР. Физика Земли, 1969, № 12, 44.
7. В. В. Сочельников. Основы теории естественного электромагнитного поля в море. Гидрометеоиздат, 1979.

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн АН СССР

Статья поступила
9 апреля 1979 г.