АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ФИЗИКА ЗЕМЛИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

12

МОСКВА · 1981

ФИЗИКА
ЗЕМЛИ
№ 12 · 1981

УДК 550.837

М. С. ЖДАНОВ

ПРОДОЛЖЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

Разработаны способы продолжения неустановившихся электромагнитных полей, основанные на использовании выведенных в работе аналогов формул Стрэттона — Чу. Введение этих формул позволяет с помощью единого подхода осветить и проблемы продолжения полей с гармонической зависимостью от времени и проблемы продолжения неустановившихся полей.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в геоэлектрике усилился интерес к проблеме продолжения электромагнитных полей, зарегистрированных на поверхности неоднородной проводящей Земли, и к вопросам применения продолженных полей для решения обратных геоэлектрических задач. Этот интерес стимулируется успехами в области теории продолжения потенциальных полей, успехами оптической голографии в различных областях физики и техники, а также эффективным применением принципов «сейсмоголографии» при интерпретации данных сейсморазведки.

Методы продолжения гармонических во времени электромагнитных полей развиты в работах [1—6] и др. Эти методы находят применение при интерпретации результатов измерений естественного электромагнитного поля на поверхности Земли (магнитовариационные и магнитотеллурические исследования). Методика продолжения нестационарных электромагнитных полей разработана в значительно меньшей степени, хотя в последние годы появился ряд интересных публикаций, посвященных решению этой задачи [7, 8]. Вместе с тем проблема продолжения нестационарных электромагнитных полей в настоящее время приобретает особо важное значение в связи с разработкой методов электромагнитного зондирования Земли с мощными искусственными источниками (МГД-генераторами). Методика исследований с мощными источниками предусматривает синхронную регистрацию импульсов электромагнитного поля сетью станций, расположенных на некоторой площади. Такая система наблюдений позволяет в принципе получить пространственно-временну́ю картину распределения поля на поверхности Земли, т. е. именно ту информацию, которая необходима для методов продолжения. С другой стороны, поскольку площадь исследований с МГД-генераторами захватывает весьма большие и неоднородные по геоэлектрическому строению территории, интерпретация результатов этих исследований заведомо не может быть проведена в рамках моделей горизонтально-слоистых сред. Здесь требуются новые подходы, учитывающие неоднородность геоэлектрического разреза. Один из таких подходов и может быть основан на продолжении поля.

В настоящей работе мы рассмотрим общие вопросы теории продолжения нестационарных электромагнитных полей, а также обсудим некоторые аспекты применения этой теории для решения обратных геоэлектрических задач.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ СТРЭТТОНА — ЧУ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ

Центральную роль в теории продолжения гармонического во времени электромагнитного поля играют интегральные формулы Стрэттона — Чу [6, 9]. Аналогичные формулы для нестационарных полей могут быть в принципе получены путем соответствующего преобразования Фурье по частоте. Мы приведем здесь непосредственный вывод формул Стрэттона — Чу для нестационарного случая, основанный на интегрировании уравнений поля, поскольку ряд получаемых при этом промежуточных результатов также необходим для построения теории продолжения.

Рассмотрим следующую электродинамическую задачу: выразить квазистационарное электромагнитное поле **E**, **H** внутри некоторой области V через значения **E**, **H** на поверхности Г, ограничивающей V. При этом предположим, что электропроводность σ внутри V постоянна, магнитная проницаемость повсеместно равна μ_0 — проницаемости вакуума, а возбудители электромагнитного поля находятся вне V. Электромагнитное поле в V и на Г удовлетворяет уравнениям

$$\nabla\times\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}, \qquad \nabla\times\mathbf{E}=-\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \tag{1}$$

Обратимся к формуле Остроградского — Гаусса:

$$\iiint\limits_V(\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV=\iint\limits_\Gamma(\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}) \tag{2}$$

и положим, что

$$\mathbf{F}=(\mathbf{C}\cdot\mathbf{H})\,\nabla U+[[\mathbf{C}\times\mathbf{H}]\times\nabla U]-[\mathbf{C}\times\mathbf{E}]\,\sigma U,$$

где $\mathbf{C}$ — произвольный постоянный вектор, а $U=U(\mathbf{r},t)$ — функция радиус-вектора $\mathbf{r}$ и времени t, дважды непрерывно дифференцируемая в V по $\mathbf{r}$ и непрерывно дифференцируемая и интегрируемая по модулю на всей временно́й оси $-\infty<t<+\infty$.

После простых векторных преобразований находим

$$(\nabla\cdot\mathbf{F})=\left(\mathbf{C}\cdot\left[\mathbf{H}\Delta U-\mu_0\sigma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}U\right]\right)$$

$$(\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S})=(\mathbf{C}\cdot\{(d\mathbf{S}\cdot\mathbf{H})\,\nabla U+[[d\mathbf{S}\times\mathbf{H}]\times\nabla U]+[d\mathbf{S}\times\mathbf{E}]\,\sigma U\}).$$

Следовательно,

$$\left(\mathbf{C}\cdot\iiint\limits_V\left[\mathbf{H}\cdot\Delta U-\mu_0\sigma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}U\right]dV\right)= \\ =\left(\mathbf{C}\cdot\iint\limits_\Gamma\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\,\nabla U+[[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla U]+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\sigma U\}dS\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Г.

Интегрируя (3) в бесконечных пределах по t и учитывая, что $\mathbf{C}$ — произвольный вектор, окончательно записываем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\iiint\limits_V\mathbf{H}\left(\Delta U+\mu_0\sigma\frac{\partial U}{\partial t}\right)dV\,dt= \\ =\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\iint\limits_\Gamma\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\,\nabla U+[[\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}]\times\nabla U]+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\sigma U\}dS\,dt. \tag{4}$$

Выберем в качестве U функцию

$$\tilde{G}=\tilde{G}(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}', t')=\frac{\sqrt{\mu_0\sigma}}{2\pi^{1/2}(t'-t)^{3/2}}\,e^{-\frac{\mu_0\sigma\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4(t'-t)}}\,\varkappa(t'-t), \tag{5}$$

где

$$\varkappa(t'-t)=\begin{cases}1, & t<t'\\ 0, & t>t'\end{cases}$$

удовлетворяющую уравнению

$$\Delta\tilde{G}+\mu_0\sigma\frac{\partial\tilde{G}}{\partial t}=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t')$$

(здесь δ — функция Дирака и лапласиан действует на переменную $\mathbf{r}$). Как видим, $\tilde{G}$ — сопряженная функция к фундаментальной функции Грина G для уравнения диффузии [10]:

$$G(\mathbf{r}, t\,|\,\mathbf{r}', t')=\tilde{G}(\mathbf{r}, -t\,|\,\mathbf{r}', -t'). \tag{6}$$

Подставляя $U=\tilde{G}$ в (4) и предполагая, что возбудители поля «включаются» в момент $t=0$ ($\mathbf{H}\equiv 0$, $\mathbf{E}\equiv 0$ при $t\leqslant 0$), получаем *интегральную формулу Стрэттона — Чу для нестационарного магнитного поля*

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{t'}\iint_\Gamma\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\,\nabla\tilde{G}+[[\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}]\times\nabla\tilde{G}]+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\sigma\tilde{G}\}\,dS\,dt=\begin{cases}\mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}'\in V\\ 0, & \mathbf{r}\notin\bar{V}\end{cases}, \tag{7}$$

где значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ относятся к внутренней стороне поверхности Γ, оператор ∇ действует на переменную $\mathbf{r}$, $\bar{V}$ — область V вместе со своей границей.

Аналогично выводится интегральная формула Стрэттона — Чу для нестационарного электрического поля. В самом деле, пусть

$$\mathbf{F}=(\mathbf{C}\cdot\mathbf{E})\,\nabla U+[[\mathbf{C}\times\mathbf{E}]\times\nabla U]-[\mathbf{C}\times\mathbf{H}]\,\mu_0\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{8}$$

Тогда

$$(\nabla\cdot\mathbf{F})=(\mathbf{C}\cdot\mathbf{E})\left(\Delta U+\mu_0\sigma\frac{\partial U}{\partial t}\right)-\mu_0\left(\nabla U\left[\mathbf{C}\times\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right]\right)-\mu_0\left([\mathbf{C}\times\mathbf{H}]\cdot\nabla\frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

$$(\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S})=\left(\mathbf{C}\cdot\left\{(d\mathbf{S}\cdot\mathbf{E})\,\nabla U+[[d\mathbf{S}\times\mathbf{E}]\times\nabla U]+[d\mathbf{S}\times\mathbf{H}]\,\mu_0\frac{\partial U}{\partial t}\right\}\right).$$

Следовательно, подставляя (8) в (2) и интегрируя по t в бесконечных пределах, записываем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\iiint_V\mathbf{E}\left(\Delta U+\mu_0\sigma\frac{\partial U}{\partial t}\right)dV\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\iint_\Gamma\left\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\,\nabla U+[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla U]+\right.$$

$$\left.+[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\,\mu_0\frac{\partial U}{\partial t}\right\}dS\,dt. \tag{9}$$

Откуда при $U=\tilde{G}$ получаем

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{t'}\iint_\Gamma\left\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\,\nabla\tilde{G}+[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\times\nabla G]+[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\,\mu_0\frac{\partial\tilde{G}}{\partial t}\right\}dS\,dt=$$

$$=\begin{cases}\mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}'\in V\\ 0, & \mathbf{r}'\notin\bar{V}\end{cases} \tag{10}$$

Отметим, что можно дать другое представление формул Стрэттона — Чу, в котором дифференциальные операторы вынесены за знак поверхностного интеграла. В самом деле, так как в формулах (7) и (10) оператор ∇ действует только на функцию $\bar{G}$, его можно заменить оператором $(-\nabla')$, дифференцирующим по $\mathbf{r}'$, а затем вынести последний из-под знака интеграла:

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{t'}\left\{\nabla'\iint_\Gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\bar{G}dS-\nabla'\times\iint_\Gamma[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\bar{G}dS-\sigma\iint_\Gamma[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\bar{G}dS\right\}dt=$$

$$=\begin{cases}\mathbf{H}(\mathbf{r}',t'), & \mathbf{r}'\in V\\ 0, & \mathbf{r}\notin\bar{V}\end{cases},$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{t'}\left\{\nabla'\iint_\Gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\bar{G}dS-\nabla'\times\iint_\Gamma[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\bar{G}dS-\mu_0\iint_\Gamma[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\frac{\partial\bar{G}}{\partial t}dS\right\}dt=$$

$$=\begin{cases}\mathbf{E}(\mathbf{r}',t'), & \mathbf{r}'\in V\\ 0, & \mathbf{r}\notin\bar{V}\end{cases}$$

Наконец, если взять ротор от левой и правой частей формул (11), то последние с учетом (1) приобретают вид

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{t'}\left\{\frac{1}{\sigma}\nabla'\times\left[\nabla'\times\iint_\Gamma[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\bar{G}dS\right]+\nabla'\times\iint_\Gamma[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\bar{G}dS\right\}dt=$$

$$=\begin{cases}\mathbf{E}(\mathbf{r}',t'), & \mathbf{r}'\in V\\ 0, & \mathbf{r}'\notin\bar{V}\end{cases},$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{t'}\left\{\frac{1}{\mu_0}\nabla'\times\left[\nabla'\times\iint_\Gamma[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\bar{G}dS\right]+\nabla'\times\iint_\Gamma[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\frac{\partial\bar{G}}{\partial t}dS\right\}dt= \tag{12}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}(\mathbf{r}',t'), & \mathbf{r}'\in V\\ 0, & \mathbf{r}'\notin\bar{V}\end{cases}.$$

Формулы (12) есть модифицированные формулы Стрэттона – Чу. Они примечательны тем, что решают задачу восстановления поля внутри области V по значениям на границе Γ одних тангенциальных компонент $\mathbf{H}_\tau$, $\mathbf{E}_\tau$ (так как $[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\equiv[\mathbf{n}\times\mathbf{H}_\tau]$ и $[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\equiv[\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\tau]$).

3. МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

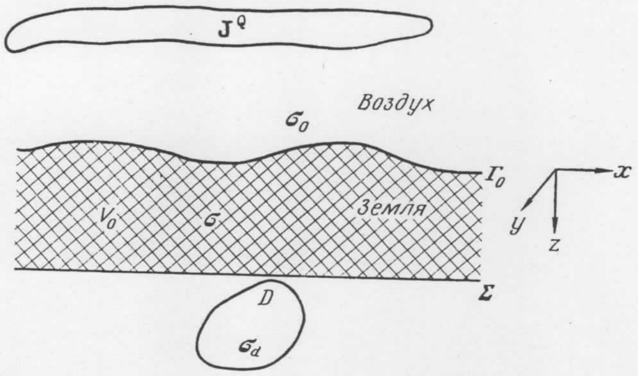
Теория продолжения нестационарных электромагнитных полей может быть построена на тех же принципах, что и теория продолжения гармонически меняющихся полей [2–6]. Более того, основные соотношения этой теории можно получить простым фурье-преобразованием по временной частоте соответствующих формул для случая гармонических колебаний. Вместе с тем представляет интерес непосредственное построение методов аналитического продолжения на основе интегральных формул Стрэттона–Чу, поскольку такой подход позволяет наиболее полно выявить все особенности продолжения нестационарного поля.

Сформулируем следующую задачу. На поверхности Земли Γ_0 в интервале времен от 0 до T задано электромагнитное поле $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$, возбуждаемое нестационарным источником $\mathbf{I}^Q$, находящимся либо на внешней стороне поверхности Γ_0, либо приподнятым над Землей и включаемым в момент $t=0$. Земля характеризуется постоянной электропроводностью σ, за исключением некоторой глубинной области D (конечной или бесконечно протяженной), где электропроводность σ_d может меняться по произвольному закону (рисунок). Поле $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ надо продолжить внутрь Земли, т. е. надо найти поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ (при $0 \leqslant t \leqslant T$), которое внутри некоторой области V_0 Земли, примыкающей к земной поверхности, удовлетворяет уравнениям

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

и на земной поверхности совпадает с $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$. Подчеркнем, что, приступая к аналитическому продолжению поля $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$, мы ничего (или почти ничего) не знаем о положении неоднородности D. Более того, определение D и яв-



ляется зачастую целью продолжения. Иными словами, мы продолжаем поле в какую-то область с постоянной электропроводностью V_0, нижняя граница которой неизвестна. Поэтому для решения задачи мы введем некоторую условную границу Σ, отделяющую область V_0 от области, которая может содержать особые точки поля (т. е. куда поле уже нельзя продолжить). В качестве Σ мы, следуя случаю гармонических колебаний поля [6], будем выбирать координатную поверхность, отвечающую ортогональным координатам, в которых разделяются переменные в уравнении Гельмгольца [10]. К числу таких поверхностей, например, относятся горизонтальная плоскость, сферическая, сфероидальная, эллипсоидальная и цилиндрическая поверхности. Обозначим через V_0 область, ограниченную поверхностью Земли Γ_0 и Σ (для простоты на рис. 1 поверхность Σ — горизонтальная плоскость). Воспользовавшись формулами Стрэттона — Чу, выразим, например, магнитное поле в V_0 через его значения на Γ_0 и Σ:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}', t') = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{t'}\iint_{\Gamma_0} \{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}^0)\nabla\tilde{G} + [[\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0]\times\nabla\tilde{G}] + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}^0]\sigma\tilde{G}\}\, dS dt -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{t'}\iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla\tilde{G} + [[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla\tilde{G} + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\sigma\tilde{G}\}\, dS\, dt, \qquad (13)$$

$$\mathbf{r}' \in V_0, \quad 0 \leqslant t' \leqslant T.$$

Мы построим оператор продолжения $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ в V_0, если преобразуем интеграл по поверхности Σ в интеграл по земной поверхности Γ_0. Такое преобразование может быть выполнено путем разделения переменных в функции Грина.

Представим функцию $\tilde{G}$ в виде

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\, e^{-i\omega(t'-t)}\, d\omega; \qquad (14)$$

где G_ω — фундаментальная функция Грина для уравнения Гельмгольца

$$G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad K^2 = i\omega\mu_0\sigma.$$

Используя описанные выше свойства поверхности Σ, можно разделить переменные в функции Грина G_ω [6, 10]:

$$G_\omega(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \int_{\mathbf{p}} f_\omega(\mathbf{r}', \mathbf{p}) g_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{p})\, d\mathbf{p}, \tag{15}$$

где $\mathbf{r}' \in V_0$, $\mathbf{r} \in \Sigma$, а $g_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ всюду в V_0 удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta g_\omega + i\omega\mu_0\sigma g_\omega = 0. \tag{16}$$

Подставляя (15) в (14), получаем

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty} \int_{\mathbf{p}} f_\omega(\mathbf{r}', \mathbf{p}) e^{-i\omega t'} g_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{p}) e^{i\omega t} d\mathbf{p}\, d\omega, \tag{17}$$

причем в силу (16) функция $g_\omega e^{i\omega t}$ удовлетворяет в V_0 уравнению диффузии

$$\Delta(g_\omega e^{i\omega t}) + \mu_0\sigma \frac{\partial}{\partial t}(g_\omega e^{i\omega t}) = 0. \tag{18}$$

С помощью разложения (17) второй интеграл в (13) переписывается в виде

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_{\Sigma} \{(\mathbf{n}\times\mathbf{H})\nabla\tilde{G} + [[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla\tilde{G}] + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\sigma\tilde{G}\}\times$$

$$\times dS\, dt = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{p}} f_\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_{\Sigma} e^{i\omega t}\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla g_\omega + [[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla g_\omega] +$$

$$+ [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\sigma g_\omega\}\, dS\, dt\, d\mathbf{p}\, e^{-i\omega t'} d\omega, \tag{19}$$

где конечные пределы интегрирования по t заменены бесконечными в силу равенства нулю поля при $t \leqslant 0$ и функции $\tilde{G}$ при $t \geqslant t'$.

Теперь воспользуемся формулой (4) и применим ее к области V_0 при $U = g_\omega e^{i\omega t}$. В силу (18) объемный интеграл в (4) пропадает и мы получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \iint_{\Sigma} e^{i\omega t}\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\nabla g_\omega + [[\mathbf{n}\times\mathbf{H}]\times\nabla g_\omega] + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\sigma g_\omega\}\, dS\, dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \iint_{\Gamma_0} e^{i\omega t}\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}^0)\nabla g_\omega + [[\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0]\times\nabla g_\omega] + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}^0]\sigma g_\omega\}\, dS\, dt. \tag{20}$$

Таким образом, нам удалось преобразовать интеграл по Σ в интеграл по земной поверхности Γ_0. Подставляя (20) в (19) и затем в (13), мы получаем формулу для аналитического продолжения магнитного поля в область V_0:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}', t') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{t'} \iint_{\Gamma_0} \{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}^0)\nabla\tilde{G} + [[\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0]\times\nabla\tilde{G}] + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}^0]\sigma\tilde{G}\}\, dS\, dt +$$

$$+ \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{p}} f_\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \iint_{\Gamma_0} e^{i\omega t}\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}^0)\nabla g_\omega + [[\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0]\times\nabla g_\omega] +$$

$$+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}^0]\sigma g_\omega\}\, dS\, dt\, d\mathbf{p}\, e^{-i\omega t'}\, d\omega. \tag{21}$$

Аналогичная формула может быть получена для электрического поля путем преобразования соответствующей формулы Стрэттона — Чу (10).

Отметим, что если обозначить через $\mathbf{H}_\omega$ и $\mathbf{E}_\omega$ временные спектры векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$:

$$\{\mathbf{H}_\omega, \mathbf{E}_\omega\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{\mathbf{H}, \mathbf{E}\} e^{i\omega t} dt,$$

то выражение (21) приводит к соотношениям для спектров $\mathbf{H}_\omega$, $\mathbf{E}_\omega$, идентичным соответствующим формулам теории продолжения гармонических во времени полей.

В качестве иллюстрации описанной выше общей схемы продолжения приведем пример разложения функции Грина $\tilde{G}$ в прямоугольных декартовых координатах (т. е. для случая, представленного на рис. 1, когда Σ — горизонтальная плоскость):

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}'t') = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i\nu} e^{i[p_x(x'-x)+p_y(y'-y)]+\nu(z'-z)} dp_x\, dp_y e^{-i\omega(t'-t)} d\omega, \tag{22}$$

где

$$\nu = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - i\omega\mu_0\sigma}.$$

Сравнивая (22) и (17), видим, что

$$f_\omega(\mathbf{r}', \mathbf{p}) = f_\omega(\mathbf{r}, p_x, p_y) = \frac{1}{2\pi i\nu} e^{ip_x x' + ip_y y' + \nu z'},$$

$$g_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = g_\omega(\mathbf{r}, p_x, p_y) = e^{-(ip_x x + ip_y y + \nu z)}. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (21), получаем явный вид формул для продолжения нестационарного поля до горизонтальной плоскости Σ. Аналогично выписываются формулы для продолжения поля до других границ Σ из описанного выше допустимого класса.

Отметим, что для построения операторов аналитического продолжения можно использовать также модифицированные формулы Стрэттона — Чу (12), которые позволяют продолжить электромагнитное поле только по тангенциальным компонентам векторов $\mathbf{H}^0$ и $\mathbf{E}^0$ на поверхности Земли. Соответствующие операторы получаются по схеме, описанной выше, и имеют структуру, аналогичную (21).

Наконец, важно подчеркнуть, что все полученные выше формулы дают лишь формальное решение задачи продолжения в том смысле, что для их применения надо знать точные и непрерывные значения поля на поверхности Земли. При практических расчетах необходимо заменять эти формулы соответствующими приближенными регуляризованными представлениями. Методика получения таких представлений для гармонических во времени полей рассмотрена в [6] и с помощью соотношений типа (21) может быть легко перенесена на нестационарные поля. Получающиеся при этом формулы полностью идентичны формулам для случая гармонических колебаний, поэтому мы их здесь не приводим.

4. «ОБРАЩЕННЫЕ» ПРОДОЛЖЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

В последние годы в сейсморазведке интенсивно развивается новый подход к интерпретации сейсмических данных, известный под названием «сейсмоголография» [11—13]. Этот подход основан на идеях продолжения волновых полей в нижнее полупространство. Однако строгое решение задачи продолжения сейсмического волнового поля в сторону источников и его последующей геофизической интерпретации сталкивается с рядом существенных математических и технических трудностей. Поэтому наибольшее распространение на практике получил метод обращенного продолжения волновых полей, при котором в нижнее полупространство продолжается не само поле, а обращенное во времени. Этот метод во многом соответствует идеям оптической и радиоголографии, нашедшим широкое применение в различных областях физики и техники. Аналогичный подход в принципе применим и к интерпретации данных электроэлектромагнитных исследований. В геоэлектрике так же, как это делается в оптической, радио- и сейсмоголографии, можно рассмотреть проблему продолжения обращенного во времени электромагнитного поля и попытаться использовать это поле для восстановления «геоэлектрического изображения среды».

Рассмотрим более подробно эту задачу применительно к геоэлектрической ситуации, описанной в разд. 3. При продолжении обращенного во времени электромагнитного поля мы как бы меняем местами причину и следствие: поле $\mathbf{H}^0$, $\mathbf{E}^0$ на поверхности Земли рассматривается не как *результат* распространения поля заданных внешних источников в неоднородной проводящей Земле, а как *причина* появления поля, т. е. как «плотности» некоторых фиктивных возбудителей (зарядов и токов), распределенных на поверхности Γ_0. Процесс распространения поля описывается при этом не во времени t, а в обращенном времени

$$\tau = T - t. \tag{24}$$

Как видим, при обращенном описании конечный момент времени $t=T$ регистрации поля на поверхности Земли рассматривается как начальный момент $\tau=0$ в задаче восстановления обращенного поля, т. е. как момент включения «возбудителей» $\mathbf{H}^0$, $\mathbf{E}^0$, а начальный момент $t=0$ – как момент их выключения.

Обозначим обращенное поле $\mathbf{H}^*$, $\mathbf{E}^*$, причем, на поверхности Земли

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{r},\ \tau) = \mathbf{H}(\mathbf{r},\ T-\tau),\ \ \mathbf{E}^*(\mathbf{r},\ \tau) = \mathbf{E}(\mathbf{r},\ T-\tau). \tag{25}$$

Обращенное поле в обращенном времени удовлетворяет тем же уравнениям, что и обычные электромагнитные поля

$$\nabla\times\mathbf{H}^* = \sigma\mathbf{E}^*, \qquad \nabla\times\mathbf{E}^* = -\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}^*}{\partial\tau}.$$

Следовательно, для него справедливы формулы Стрэттона – Чу (7) и (10) (с заменой t на τ, t' на τ' и интервала интегрирования $(0, t')$ по t на $(0, \tau')$ по τ). Например, формула (7) приобретает вид:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{\tau'}\iint_{\Gamma}\left\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}^*)\nabla\tilde{G} + [[\mathbf{n}\times\mathbf{H}^*]\times\nabla\tilde{G}] + [\mathbf{n}\times\mathbf{E}^*]\sigma\tilde{G}\right\}dS\,d\tau =$$

$$= \begin{cases}\mathbf{H}^*(\mathbf{r}', \tau'), & \mathbf{r}'\in V\\ 0, & \mathbf{r}'\notin\overline{V}\end{cases}, \tag{26}$$

С помощью этих формул, так же как это было сделано в разд. 3, можно построить строгие методы продолжения обращенного электромагнитного поля, измеренного на поверхности Земли, в нижнее полупространство, содержащее произвольные глубинные геоэлектрические неоднородности. Однако эта процедура, как мы уже знаем, реализуется с помощью весьма сложных операторов.

Ситуация существенно упрощается, если предположить, что мы продолжаем обращенное поле в однородную Землю с электропроводностью $\sigma=\text{const}$. Эта задача, очевидно, решается непосредственно с помощью формул Стрэттона – Чу (26), в которых интегрирование выполняется только по поверхности Земли Γ_0. Учитывая при этом, что на поверхности Земли справедлива формула (25) и $\tau=T-t$, получаем

$$\mathbf{H}^{*}(\mathbf{r}',\tau')=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{t'}^{T}\iint\limits_{\Gamma_0}\left\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}^0)\nabla G+[[\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0]\times\nabla G]+[\mathbf{n}\times\mathbf{E}^0]\sigma G\right\}ds\,dt, \tag{27}$$

где $G=G(\mathbf{r},\ \tau|\mathbf{r}',\ \tau')$ – фундаментальная функция Грина для уравнения диффузии

$$G=\frac{\sqrt{\mu_0\sigma}}{2\pi^{1/2}(t-t')^{3/2}}e^{\frac{-\mu_0\sigma|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2}{4(t-t')}}\varkappa(t-t'), \tag{28}$$

связанная с функцией $\tilde{G}$ формулой (6), $t'=T-\tau'$.

Аналогичное выражение можно получить для электрического поля:

$$\mathbf{E}^{*}(\mathbf{r}',\tau')=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{t'}^{T}\iint\limits_{\Gamma_0}\left\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}^0)\nabla G+[[\mathbf{n}\times\mathbf{E}^0]\times\nabla G]+[\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0]\mu_0\frac{\partial G}{\partial t}\right\}ds\,dt, \tag{29}$$

Формулы (27) и (29) решают проблему обращенного продолжения нестационарного электромагнитного поля в однородную Землю. Эти формулы, так же как и в разд. 3, могут быть модифицированы применительно к задаче продолжения только по тангенциальным компонентам векторов $\mathbf{H}^0$ и $\mathbf{E}^0$ на поверхности Земли (см. (12)).

Отметим, что при практическом применении формул обращенного продолжения (27) и (29) к реальным электромагнитным данным целесообразно, так же как это делается в сейсморазведке, брать в качестве σ кажущуюся удельную электропроводность Земли $\sigma_k(\tau)$, получаемую по соответствующим формулам теории электромагнитного зондирования и осредненную по времени в интервале $(0,\ \tau')$:

$$\sigma=\frac{1}{\tau'}\int\limits_0^{\tau'}\sigma_k(\tau)\,d\tau. \tag{30}$$

При этом реальный неоднородный разрез Земли как бы заменяется некоторой однородной моделью (для каждого времени τ' своей).

Выражения (27) и (29) описывают преобразования расходящихся в реальной среде дифрагированных на геоэлектрических неоднородностях электромагнитных полей в поля, сходящиеся в соответствующие точки, линии и поверхности дифракции (поскольку, как мы уже отмечали выше, при переходе к обращенному полю источники и точки наблюдения как бы меняются местами). При этом в момент времени $t'=0$, так же как это имеет место в сейсмоголографии, поля $\mathbf{H}^*(\mathbf{r}',\ T)$ и $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}',\ T)$ образуют изображения мнимых возбудителей поля, связанных с геоэлектрическими неоднородностями.

Здесь необходимо подчеркнуть, что интерпретация продолженного обращенного поля в геоэлектрике отнюдь не так проста, как в оптической голографии. Действительно, в последней обращенное продолжение поля осуществляется в среде с заранее известным строением, как правило, однородной. В рассматриваемых же задачах, так же как и в сейсморазведке [12], приходится восстанавливать поле в среде неизвестного строения с целью определения геоэлектрической структуры этой среды. Более того, сложность решения геоэлектрических задач по сравнению с оптической или сейсмоголографией усугубляется еще и тем, что приходится использовать весьма длиннопериодные поля, что делает невозможным какие-то геометрические построения (аналогичные тем, что имеют место в геометрической оптике или геометрической сейсмике).

Вместе с тем есть все основания надеяться, что обращенное продолжение электромагнитного поля может явиться полезной трансформацией зарегистрированных данных, облегчающей решение сложных обратных геоэлектрических задач.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы описали ряд методов прямого и обращенного продолжения нестационарных электромагнитных полей в задачах геоэлектрики. Эти методы, так же как и в случае гармонических колебаний, конструируются на основе интегральных формул Стрэттона – Чу. Их прикладное значение заключается в том, что они позволяют строить «изображения» геоэлектрической среды в виде особых точек, линий и поверхностей аналитически продолженного поля [5, 6] или мнимых возбудителей (точек дифракции) при обращенном продолжении. Однако вопрос об особенностях связи этих «изображений» с реальной структурой Земли во многом еще представляется неясным и требует специального исследования, выходящего за рамки настоящей статьи. При анализе этого вопроса возникают те же проблемы, что и в сейсмической голографии, поэтому для его решения целесообразно, по-видимому, обращение к богатому опыту сейсморазведки. Вместе с тем сама перспектива получения метода интерпретации электромагнитных данных в сложных условиях геоэлектрически неоднородных сред представляется весьма заманчивой и оправдывает дальнейшую разработку теории продолжения электромагнитных полей.

Литература

1. *Бердичевский М. Н., Жданов М. С.* О продолжении переменного электромагнитного поля в горизонтально неоднородных средах.– В кн.: Геомагнитные исследования. Вып. 15. М., 1976.
2. *Жданов М. С.* Об аналитическом продолжении трехмерных электромагнитных полей.– Изв. АН СССР. Физика Земли, 1973, № 4.
3. *Жданов М. С.* Об аналитическом продолжении двумерных электромагнитных полей.– Изв. АН СССР. Физика Земли, 1973, № 6.
4. *Жданов М. С.* Вопросы теории интерпретации глубинных электромагнитных аномалий на основе методов аналитического продолжения.– Изв. АН СССР. Физика Земли, 1975, № 9.
5. *Жданов М. С., Варенцов И. М., Голубев Н. Г.* Определение положения геоэлектрических неоднородностей методами аналитического продолжения переменных геомагнитных полей.– Геология и геофизика, 1978, № 7.
6. *Zhdanov M. S.* Cauchy integral analogues for the separation and continuation of electromagnetic fields within conducting matter.— Geophys. Surveys, 1980, № 4.
7. *Филатов В. В., Исаев Г. А.* О возможности использования принципов аналитического продолжения в методах становления поля.– В кн.: Новое в развитии рудной геофизики в Сибири. Новосибирск, 1976. (Тр. СНИИГГ и МС, вып. 238).
8. *Филатов В. В.* Об одной задаче продолжения нестационарных электромагнитных полей.– Геология и геофизика, 1978, № 7.
9. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. М.– Л.: ОГИЗ, 1948.
10. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
11. *Тимошин Ю. В.* Основы дифракционного преобразования сейсмических записей. М.: Недра, 1972.
12. *Петрашень Г. И., Нахамкин С. А.* Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки. Ленинград: Наука, 1973.
13. *Васильев С. А.* О возможности продолжения сейсмического поля внутрь слоисто-однородной среды.– Изв. АН СССР. Физика Земли, 1975, № 9.

Академия наук СССР
Институт земного магнетизма
ионосферы и распространения радиоволн

Поступила в редакцию
23.XII.1980