

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

---

ИЗВЕСТИЯ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР  
ФИЗИКА ЗЕМЛИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

4

---

МОСКВА · 1984

УДК 550.837

М. С. ЖДАНОВ, М. А. ФРЕНКЕЛЬ

### МЕТОД МИГРАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

В работе предложен метод миграции нестационарных электромагнитных полей, основанный на «обращенном» продолжении поля в проводящую Землю. Подробно исследованы свойства миграционного поля, а также возможности применения метода электромагнитной миграции для решения обратных задач геоэлектрики.

В работах [1–3] развита теория аналитического продолжения нестационарных электромагнитных полей в проводящую Землю и сформулированы основные принципы так называемого «обращенного» продолжения поля. Указанный аппарат представляет собой обобщение на случай переменных электромагнитных полей известных методов обращенного продолжения волновых полей (так называемой сейсмической миграции), получивших широкое применение в сейсморазведке при решении обратных сейсмических задач [4–6]. Поэтому естественно рассматривать предлагаемый нами аппарат трансформации электромагнитных полей, как «электромагнитную миграцию». Цель данной работы — исследование свойств «обращенного» продолжения электромагнитного поля, а также анализ возможности применения электромагнитной миграции для решения обратных задач геоэлектрики.

**1. Интегральные формулы Стрэттона — Чу для нестационарного поля.** Математической основой предлагаемого метода являются интегральные формулы Стрэттона — Чу для нестационарного поля. Непосредственный вывод этих формул, основанный на интегрировании уравнений поля, дан в работе [1].

Формулы Стрэттона — Чу позволяют решить следующую электродинамическую задачу: выразить нестационарное<sup>1</sup> электромагнитное поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  внутри некоторой области  $V$  через значения  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  на поверхности  $\Gamma$ , ограничивающей  $V$ . При этом предполагается, что электропроводность  $\sigma$  внутри  $V$  постоянна, магнитная проницаемость повсеместно равна  $\mu_0$  — проницаемости вакуума, а возбудители электромагнитного поля находятся вне  $V$ :

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{t'} \iint_{\Gamma} \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \nabla G + [ [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \nabla G ] + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \sigma G \} dS dt = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in V, \\ 0, & \mathbf{r}' \notin V, \end{cases} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{t'} \iint_{\Gamma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla G + [ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \nabla G ] + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \mu_0 \frac{\partial G}{\partial t} \right\} dS dt = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in V, \\ 0, & \mathbf{r}' \notin V, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma$ .

<sup>1</sup> Рассматривается квазистационарная модель электромагнитного поля, т. е. токами смещения в уравнениях Максвелла пренебрегаем.



В формулах (1) и (2) значения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  относятся к внутренней стороне поверхности  $\Gamma$ , оператор  $\nabla$  действует на переменную  $\mathbf{r}$ ,  $\bar{V}$  — область  $V$  вместе со своей границей, а функция  $G$  определяется так:

$$G = G(\mathbf{r}', t' | \mathbf{r}, t) = \frac{(\mu_0 \sigma)^{1/2}}{2\pi^{1/2} (t' - t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{4(t' - t)}\right) \kappa(t' - t),$$

где

$$\kappa(t' - t) = \begin{cases} 1, & t < t' \\ 0, & t > t' \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\Delta G - \mu_0 \sigma \frac{\partial G}{\partial t'} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (3)$$

(здесь  $\delta$  — функция Дирака и лапласиан действует на переменную  $\mathbf{r}'$ ), т. е.  $G$  — фундаментальная функция Грина для уравнения диффузии [7].

Формулы (1) и (2) полностью симметричны относительно векторов электромагнитного поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и поэтому могут быть приведены к единому виду. Действительно, воспользовавшись первым и вторым уравнениями Максвелла, получаем

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{t'} \iint_{\Gamma} \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}) \nabla G + [ [\mathbf{n} \times \mathbf{P}] \times \nabla G ] + [ \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{P} ] G \} dS dt = \begin{cases} \mathbf{P}(\mathbf{r}', t), & \mathbf{r}' \in V, \\ 0, & \mathbf{r}' \in \bar{V}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  — один из векторов электромагнитного поля  $\mathbf{P} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ . Эти формулы лежат в основе теории аналитического и «обращенного» продолжения поля [1].

**2. Интегралы типа Стрэттона — Чу для нестационарного поля.** По аналогии с интегралами типа Стрэттона — Чу для гармонически меняющихся во времени полей [8] можно ввести в рассмотрение интегралы типа Стрэттона — Чу для нестационарных полей.

Пусть на внутренней стороне замкнутой гладкой поверхности  $\Gamma$ , ограничивающей область  $V$ , заданы некоторые векторные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , удовлетворяющие следующим условиям: а) они имеют непрерывно дифференцируемые тангенциальные компоненты  $\mathbf{E}_{tg}$ ,  $\mathbf{H}_{tg}$ ; б) их нормальные компоненты  $E_n$ ,  $H_n$  связаны с тангенциальными компонентами  $\mathbf{E}_{tg}$ ,  $\mathbf{H}_{tg}$  следующими соотношениями:

$$E_n = -\frac{1}{\sigma} \text{div}^{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{tg}]; \quad \frac{\partial H_n}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \text{div}^{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{tg}], \quad (5)$$

где  $\sigma$  — некоторая константа,  $\text{div}^{\Gamma}$  — символ поверхностной дивергенции.

Так как соотношение (5) является двумерным следствием уравнений Максвелла, то поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  относятся к классу электромагнитных полей.

Рассмотрим выражения

$$\mathbf{K}^E(\mathbf{r}', t') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{t'} \iint_{\Gamma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla G + [ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \nabla G ] + [ \mathbf{n} \times \mathbf{H} ] \mu_0 \frac{\partial G}{\partial t} \right\} dS dt, \quad (6)$$

$$\mathbf{K}^H(\mathbf{r}', t') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{t'} \iint_{\Gamma} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \nabla G + [ [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \times \nabla G ] + [ \mathbf{n} \times \mathbf{E} ] \sigma G \right\} dS dt. \quad (7)$$

Эти выражения совпадают с интегралами из формул Стрэттона — Чу (1), (2). Они могут быть названы интегралами типа Стрэттона — Чу.

Функции  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — это «электрическая» и «магнитная» плотности интегралов типа Страттона — Чу для нестационарного поля. Интегралы типа Страттона — Чу (6), (7) обладают рядом свойств (аналогичных свойствам их гармонических аналогов [8]), основными из которых являются следующие.

1) Интегралы типа Страттона — Чу вне поверхности  $\Gamma$  удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{K}^H = \sigma \mathbf{K}^E; \quad \operatorname{rot} \mathbf{K}^E = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{K}^H}{\partial t'}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что функции  $\mathbf{K}^E$ ,  $\mathbf{K}^H$  вне поверхности  $\Gamma$  удовлетворяют уравнению диффузии:

$$\Delta \mathbf{K}^{E,H} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{K}^{E,H}}{\partial t'} = 0.$$

2) Если плотности  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  интегралов типа Страттона — Чу совпадают с граничными значениями векторных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , которые удовлетворяют в области  $V_i$  и на  $\Gamma$  уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

то

$$\mathbf{K}^E(\mathbf{r}', t') = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in V_i, \\ 0, & \mathbf{r}' \notin V_i, \end{cases} \quad \mathbf{K}^H(\mathbf{r}', t') = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}', t'), & \mathbf{r}' \in V_i, \\ 0, & \mathbf{r}' \notin V_i. \end{cases}$$

Интегралам типа Страттона — Чу (6), (7) можно дать простую физическую интерпретацию. Пусть на замкнутой поверхности распределены электрические и магнитные токи и заряды с поверхностной плотностью  $\mathbf{I}^E$ ,  $\mathbf{I}^H$  и  $q_s^E$ ,  $q_s^H$ . Они возбуждают электромагнитное поле везде вне  $\Gamma$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}', t') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{t'} \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{\dot{q}_s^E \nabla G}{\sigma} - \mathbf{I}^H \times \nabla G + \mu_0 \mathbf{I}^E \frac{\partial G}{\partial t} \right\} dS dt, \quad (9)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}', t') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{t'} \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{q_s^H \nabla G}{\mu_0} + \mathbf{I}^E \times \nabla G - \sigma \mathbf{I}^H G \right\} dS dt. \quad (10)$$

Сравнивая (6), (7) с (9), (10), мы видим, что электромагнитное поле реальных источников вне  $\Gamma$  совпадает с полем, возбуждаемым эквивалентными (фиктивными) токами и зарядами, распределенными на  $\Gamma$ . Плотность фиктивных источников выражается через нормальные и тангенциальные компоненты электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^E &= [\mathbf{n} \times \mathbf{H}], & \mathbf{I}^H &= -[\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \\ \dot{q}_s^E &= \sigma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}); & q_s^H &= \mu_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (11)$$

причем в силу (5) имеют место соотношения

$$\operatorname{div}^{\Gamma} \mathbf{I}^E = -\frac{\partial q_s^E}{\partial t}; \quad \operatorname{div}^{\Gamma} \mathbf{I}^H = -\frac{\partial q_s^H}{\partial t}. \quad (12)$$

С помощью интегралов типа Страттона — Чу для нестационарного поля можно строго определить понятие «обращенного» продолжения нестационарного поля, введенное в [1].

3. «Обращенное» продолжение нестационарного электромагнитного поля. Сформулируем следующую задачу. На поверхности Земли  $\Gamma_0$  в интервале времен от 0 до  $T$  задано электромагнитное поле  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$ , возбуждаемое нестационарным источником  $\mathbf{J}^0$ , находящимся либо на внеш-



ней стороне поверхности  $\Gamma_0$ , либо приподнятым над Землей и включаемым в момент  $t=0$ . Земля характеризуется постоянной электропроводностью  $\sigma$ , за исключением некоторой глубинной области  $D$  (конечной или бесконечно протяженной), где электропроводность  $\sigma_D$  может меняться по произвольному закону.

Проблема заключается в нахождении области с аномальной электропроводностью по измеренным на поверхности Земли полям  $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, t)$ ;  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}, t)$ . Для решения этой задачи сконструируем следующую трансформацию поля. Перейдем от обычного времени  $t$  к обращенному времени  $\tau = T - t$  и зададим вспомогательные поля  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \tau)$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \tau)$  на поверхности Земли  $\Gamma_0$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{tg}(\mathbf{r}, \tau) &= \mathbf{E}_{tg}^0(\mathbf{r}, T - \tau); & F_n(\mathbf{r}, \tau) &= E_n^0(\mathbf{r}, T - \tau), \\ \mathbf{R}_{tg}(\mathbf{r}, \tau) &= \mathbf{H}_{tg}^0(\mathbf{r}, T - \tau); & R_n(\mathbf{r}, \tau) &= -H_n^0(\mathbf{r}, T - \tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Как видно, при таком определении функции  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{R}$  удовлетворяют условию (5) (при замене в последнем времени  $t$  на обращенное время  $\tau$ ):

$$F_n = -\frac{1}{\sigma} \operatorname{div}^{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{R}_{tg}]; \quad \frac{\partial R_n}{\partial \tau} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}^{\Gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{F}_{tg}]. \quad (14)$$

Следовательно, эти функции можно использовать как плотности интегралов типа Стрэттона - Чу, записанных для обращенного времени  $\tau$ :

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \tau') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\tau'} \iint_{\Gamma_0} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) \nabla G + [[\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \times \nabla G] + [\mathbf{n} \times \mathbf{R}] \mu_0 \frac{\partial G}{\partial \tau} \right\} dS d\tau, \quad (15)$$

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{r}', \tau') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\tau'} \iint_{\Gamma_0} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}) \nabla G + [[\mathbf{n} \times \mathbf{R}] \times \nabla G] + [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] \sigma G \right\} dS d\tau. \quad (16)$$

В соответствии с основными свойствами интегралов типа Стрэттона - Чу поля  $\mathbf{E}^*$ ,  $\mathbf{H}^*$  вне  $\Gamma_0$  удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^* = \sigma \mathbf{E}^*; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^* = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \tau'}. \quad (17)$$

Поле  $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \tau')$ ,  $\mathbf{H}^*(\mathbf{r}', \tau')$ , согласно работе [1], будем называть «обращенным» продолжением электромагнитного поля  $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}^0(\mathbf{r}, t)$  или просто «обращенным» полем.

«Обращенному» полю  $\mathbf{E}^*$ ,  $\mathbf{H}^*$  можно придать простой физический смысл. В самом деле, в соответствии с (11) определим фиктивные электрические и магнитные заряды и токи, отвечающие функциям  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{R}$  и полю  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{*E}(\mathbf{r}, \tau) &= [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, T - \tau)]; & \mathbf{I}^{*H}(\mathbf{r}, \tau) &= -[\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, T - \tau)], \\ \dot{q}_s^{*E}(\mathbf{r}, \tau) &= \sigma (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, T - \tau)); & \dot{q}_s^{*H}(\mathbf{r}, \tau) &= -\mu_0 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0(\mathbf{r}, T - \tau)). \end{aligned} \quad (18)$$

В силу того что исходные поля  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  удовлетворяют в однородной проводящей Земле вплоть до поверхности  $\Gamma_0$  уравнениям Максвелла в обычном времени, токи и заряды, введенные соотношениями (18), будут удовлетворять уравнениям (12) в обращенном времени. Следовательно, выражения для  $\mathbf{E}^*$ ,  $\mathbf{H}^*$  можно записать так:

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \tau') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\tau'} \iint_{\Gamma_0} \left\{ \frac{\dot{q}_s^{*E} \nabla G}{\sigma} - \mathbf{I}^{*H} \times \nabla G + \mu_0 \mathbf{I}^{*E} \frac{\partial G}{\partial \tau} \right\} dS d\tau, \quad (19)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}', \tau') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\tau'} \iint_{\Gamma_0} \left\{ \frac{q_s \cdot \mathbf{H} \nabla G}{\mu_0} + \mathbf{I}^E \times \nabla G - \sigma \mathbf{I}^H G \right\} dS d\tau. \quad (20)$$

Таким образом, «обращенное» поле является электромагнитным полем, возбуждаемым в однородной проводящей Земле системой фиктивных токов и зарядов, определенных по наблюдаемым полям  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$ , но в обращенном времени (т. е. включаемых в конечный момент регистрации поля  $t=T$ , работающих в обращенном времени  $\tau$ , и выключаемых в момент  $t=0$ ). Подставляя (18) в (19) и (20), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}', \tau') = & -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\tau'} \iint_{\Gamma_0} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, T-\tau)) \nabla G + \right. \\ & \left. + [[\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, T-\tau)] \times \nabla G] + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0(\mathbf{r}, T-\tau)] \mu_0 \frac{\partial G}{\partial \tau} \right\} dS d\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}', \tau') = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\tau'} \iint_{\Gamma_0} \left\{ -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0(\mathbf{r}, T-\tau)) \nabla G + \right.$$

$$\left. + [[\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0(\mathbf{r}, T-\tau)] \times \nabla G] + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}, T-\tau)] \sigma G \right\} dS d\tau.$$

Заменим переменную  $\tau$  в выражениях (21) на  $T-t$ , тогда

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}', T-t') = -\frac{1}{4\pi} \int_{t'}^T \iint_{\Gamma_0} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0) \nabla G + [[\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \times \nabla G] + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \mu_0 \frac{\partial G}{\partial t} \right\} dS dt, \quad (22)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}', T-t') = -\frac{1}{4\pi} \int_{t'}^T \iint_{\Gamma_0} \left\{ -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \nabla G + [[\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \times \nabla G] + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \sigma G \right\} dS dt, \quad (23)$$

где  $\bar{G} = \bar{G}(\mathbf{r}', t' | \mathbf{r}, t)$  — функция, сопряженная к фундаментальной функции Грина для уравнения диффузии.

Функции  $G$  и  $\bar{G}$  связаны следующими соотношениями:

$$\bar{G}(\mathbf{r}', t' | \mathbf{r}, t) = G(\mathbf{r}', -t' | \mathbf{r}, -t) = G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}', t'). \quad (24)$$

Отметим, что при практическом применении формул «обращенного» продолжения (22), (23) к реальным электромагнитным данным целесообразно, так же, как это делается в сейсморазведке, брать в качестве  $\sigma$  кажущуюся удельную электропроводность Земли  $\sigma_k(\tau)$ , получаемую по соответствующим формулам теории электромагнитного зондирования и осредненную по времени в интервале  $(0, \tau')$ :

$$\sigma = \frac{1}{\tau'} \int_0^{\tau'} \sigma_k(\tau) d\tau. \quad (25)$$

При этом реальный неоднородный разрез Земли как бы заменяется некоторой однородной моделью (для каждого времени  $\tau'$  — своей).

Следует подчеркнуть, что трансформация поля, описываемая формулами (22), (23), является устойчивой процедурой в силу ограниченности в пространстве  $L_2$  операторов, входящих в правую часть этих выражений.

**4. Миграция электромагнитного поля.** Указанный в предыдущем параграфе способ введения вспомогательных полей  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{R}$  на поверхности Земли  $\Gamma_0$  не является единственным. В самом деле, определим  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{R}$



следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{tg}(\mathbf{r}, \tau) &= \mathbf{E}_{tg}^0(\mathbf{r}, T-\tau); & \mathbf{R}_{tg}(\mathbf{r}, \tau) &= \mathbf{H}_{tg}^0(\mathbf{r}, T-\tau), \\ F_n(\mathbf{r}, \tau) &= \frac{1}{c} E_n^0(\mathbf{r}, T-\tau); & R_n(\mathbf{r}, \tau) &= -H_n^0(\mathbf{r}, T-\tau), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $c = \text{const} > 0$ .

Непосредственная проверка показывает, что поля  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{R}$ , определенные (26), будут удовлетворять условиям (14) при замене  $\sigma$  на  $c\sigma$ . Иначе говоря, для того чтобы с помощью этих функций определить интегралы типа Страттона — Чу, необходимо ввести в рассмотрение полупространство с некоторой фиктивной электропроводностью

$$\sigma^m = c\sigma. \quad (27)$$

При таком введении полей  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{R}$  формулы (22), (23) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^m(\mathbf{r}', T-t') &= -\frac{1}{4\pi} \int_{t'}^T \iint_{\Gamma_0} \left\{ \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0)}{c} \nabla \bar{G}^m + [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0) \times \nabla \bar{G}^m] + \right. \\ &\quad \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \mu_0 \frac{\partial \bar{G}^m}{\partial t} \right\} dS dt, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^m(\mathbf{r}', T-t') &= -\frac{1}{4\pi} \int_{t'}^T \iint_{\Gamma_0} \left\{ -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \nabla \bar{G}^m + [(\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0) \times \nabla \bar{G}^m] + \right. \\ &\quad \left. + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \sigma^m \bar{G}^m \right\} dS dt, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\bar{G}^m = \frac{(\mu_0 \sigma^m)^{1/2}}{2\pi^{1/2} (t-t')^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mu_0 \sigma^m |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4(t-t')}\right) \chi(t-t').$$

Трансформацию наблюдаемого на  $\Gamma_0$  поля  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ , выполняемую по формулам (28), (29), будем называть миграцией электромагнитного поля, а само поле  $\mathbf{E}^m, \mathbf{H}^m$  — миграционным электромагнитным полем.

Очевидно, что «обращенное» поле является частным случаем поля, получаемого в результате миграции (при  $c=1, \sigma^m=\sigma$ ), поэтому свойства полей  $\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*$  и  $\mathbf{E}^m, \mathbf{H}^m$  во многом аналогичны. Однако, как будет показано ниже, поле  $\mathbf{E}^m, \mathbf{H}^m$  обладает свойствами более удобными для проведения интерпретации электромагнитных данных, нежели обычное «обращенное» поле  $\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*$ .

В заключении данного параграфа отметим, что мы вводим понятие электромагнитной миграции по аналогии с сейсмической миграцией с тем, чтобы подчеркнуть принципиальное сходство этих методов. По существу, процедура миграции, как мы увидим ниже, позволяет сфокусировать электромагнитное поле на геоэлектрической неоднородности.

5. «Псевдомиграционное» поле. Назовем «псевдомиграционным» поле  $\mathbf{E}^p, \mathbf{H}^p$ , получаемое в результате формальной замены в формулах (1), (2) фундаментальной функции Грина  $G$  на функцию, сопряженную к фундаментальной функции Грина для уравнения диффузии  $\bar{G}$  (с соответствующим изменением пределов интегрирования по времени  $t$ ):

$$\mathbf{E}^p(\mathbf{r}', T-t') = -\frac{1}{4\pi} \int_{t'}^T \iint_{\Gamma_0} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^0) \nabla \bar{G} + [(\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0) \times \nabla \bar{G}] + [\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0] \mu_0 \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} \right\} dS dt, \quad (30)$$



$$\mathbf{H}^p(\mathbf{r}', T-t') = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_0} \int_{t'}^T \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^0) \nabla G + [(\mathbf{n} \times \mathbf{H}^0) \times \nabla G] + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}^0] \sigma G\} dS dt. \quad (31)$$

Очевидно, что поля  $\mathbf{E}^p$ ,  $\mathbf{H}^p$ , определенные уравнениями (30), (31), совместно не удовлетворяют уравнениям Максвелла (поэтому их следует рассматривать независимо), хотя каждое в отдельности удовлетворяет уравнению диффузии по времени  $\tau = T - t$ , например:

$$\Delta \mathbf{H}^p - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{H}^p}{\partial \tau} = 0.$$

«Псевдомиграционное» поле  $\mathbf{E}^p$ ,  $\mathbf{H}^p$  является результатом формальной (без соответствующего согласования с граничными условиями на  $\Gamma_0$ ) трансформации наблюденного на  $\Gamma_0$  поля  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  и, тем не менее, это поле (точнее, «магнитная» компонента «псевдомиграционного» поля  $\mathbf{H}^p$ ) обладает замечательными свойствами, весьма удобными для практических исследований. В следующем параграфе будет показано, что поле  $\mathbf{H}^p$  позволяет точно локализовать в пространстве аномалиеобразующие объекты, следовательно, оно может также быть использовано для оценки точности локализации источников аномального поля при решении обратных задач электромагнитной индукции в неоднородных средах.

Заметим, что выражения для полей  $\mathbf{E}^*$  и  $\mathbf{E}^p$  совпадают, а выражения для полей  $\mathbf{H}^*$  и  $\mathbf{H}^p$  различаются лишь знаками при нормальной компоненте магнитного поля  $H_n^0$ . Ясно, что в определенных ситуациях возможно близкое или даже одинаковое поведение «псевдомиграционного» и «обращенного» полей (например, при  $H$ -поляризации первичного поля). Таким образом, изучение свойств «псевдомиграционного» и «обращенного» полей, несмотря на различную физическую природу их возбуждения, можно вести параллельно.

**6. Свойства электромагнитной миграции.** Для того чтобы более наглядно представить себе свойства миграционного поля  $\mathbf{E}^m$ ,  $\mathbf{H}^m$ , перейдем вновь от обращенного времени  $\tau$  к обычному прямому времени  $t$  и положим для простоты  $c=1$ :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{E}^m(\mathbf{r}', T-t'); \quad \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{H}^m(\mathbf{r}', T-t').$$

Согласно (17), поля  $\hat{\mathbf{E}}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}$  в прямом времени удовлетворяют уравнениям

$$\text{rot } \hat{\mathbf{H}} = \hat{\sigma} \hat{\mathbf{E}}; \quad \text{rot } \hat{\mathbf{E}} = \mu_0 \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}}{\partial t'}$$

и, следовательно, удовлетворяют также следующим уравнениям:

$$\Delta(\hat{\mathbf{E}}; \hat{\mathbf{H}}) + \mu_0 \sigma \frac{\partial(\hat{\mathbf{E}}; \hat{\mathbf{H}})}{\partial t'} = 0. \quad (32)$$

Если обычное уравнение диффузии описывает развитие процесса распространения электромагнитного поля при возрастающем времени от источника к наблюдателю, то уравнения (32) описывают этот же процесс в обратном порядке — от конечного распределения поля  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  на поверхности Земли к его начальному распределению в источниках. Следовательно, предложенная нами трансформация поля (22), (23) описывает преобразование расходящихся в реальной среде дифрагированных на геоэлектрических неоднородностях электромагнитных полей в поля, сходящиеся в соответствующие точки, линии и поверхности дифракции. При этом в момент  $\tau' = T$  (или  $t' = 0$ ), так же как это имеет место в сейсмо-



лографии, поля  $\mathbf{E}^m(\mathbf{r}', T) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', 0)$  и  $\mathbf{H}^m(\mathbf{r}', T) = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}', 0)$  образуют изображение мнимых возбудителей поля, связанных с геоэлектрическими неоднородностями.

Описанный процесс эквивалентен, по существу, трансформации поля, осуществляемой в обычной оптической голографии. В самом деле, если перейти в формулах (22), (23) к временным спектрам, то мы получим справа формулы, аналогичные обычным формулам Френеля (только записанные для диффузионного процесса), и переход к обращенному времени сведется к смене знака фазы электромагнитного поля и соответственно замене суперпозиции расходящихся волн в суперпозицию сходящихся волн.

Проиллюстрируем это положение на некоторых теоретических и модельных примерах, которые позволят исследовать разрешающую способность метода и определить на его основе некоторые принципы интерпретации нестационарных электромагнитных полей.

Рассмотрим последовательно одно, двух и трехмерные ситуации, в которых электромагнитное поле возбуждается соответственно бесконечной горизонтальной токовой плоскостью, бесконечно длинным кабелем и горизонтальным электрическим диполем. Указанные источники погружены в бесконечное однородное проводящее пространство с электропроводностью  $\sigma$ . Токовая плоскость параллельна координатной плоскости  $XOY$  и проходит через точку  $z_0$ , бесконечно длинный кабель и диполь параллельны оси  $Y$ , кабель проходит через точку  $z_0$ , а диполь зафиксирован в пространстве в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , причем  $z_0 > 0$ . Ток в источниках меняется по закону

$$J = j\delta(t), \quad (33)$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака;  $j$  — некоторая постоянная.

Обозначим через  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$  электромагнитное поле, зарегистрированное в интервале времени  $(0, T)$  на горизонтальной поверхности  $\Gamma_0$ , совпадающей с плоскостью  $XOY$ , и исследуем свойства поля  $\mathbf{E}^*, \mathbf{H}^*$ , полученного в результате «обращенного» продолжения поля  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$  в нижнее полупространство.

В одномерном случае формулы (22), (23) преобразуются к виду

$$H_x^* = \frac{1}{4\pi} \int_{t'}^T (H_x^0 \bar{G}_{,z} - E_y^0 \bar{G}_\sigma) dt, \quad E_y^* = \frac{1}{4\pi} \int_{t'}^T (H_x^0 \bar{G}_{,t\mu_0} + E_y^0 \bar{G}_{,z}) dt. \quad (34)$$

В двумерном случае эти же компоненты «обращенного» поля имеют следующий вид:

$$H_x^* = \frac{1}{4\pi} \int_{t'}^T \int_{-\infty}^{\infty} (H_x^0 \bar{G}_{,z} - H_z^0 \bar{G}_{,x} - E_y^0 \bar{G}_\sigma) dx dt, \\ E_y^* = \frac{1}{4\pi} \int_{t'}^T \int_{-\infty}^{\infty} (H_x^0 \bar{G}_{,t\mu_0} + E_y^0 \bar{G}_{,z}) dx dt. \quad (35)$$

И, наконец, в трехмерном случае

$$H_x^* = \frac{1}{4\pi} \int_{t'}^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_x^0 \bar{G}_{,z} - H_z^0 \bar{G}_{,x} - E_y^0 \bar{G}_\sigma) dx dy dt, \\ E_y^* = \frac{1}{4\pi} \int_{t'}^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_x^0 \bar{G}_{,t\mu_0} + E_y^0 \bar{G}_{,z}) dx dy dt. \quad (36)$$



В формулах (34)–(36)

$$G_{,\alpha} = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \alpha}; \quad \alpha = x, y, z, t, \quad H_x^0 = -\frac{j}{4\pi} G_{,z}; \quad H_z^0 = \frac{j}{4\pi} G_{,x}, \quad (37)$$

$$E_y^0 = -\mu_0 \frac{j}{4\pi} G_{,t}; \quad E_{y^{(3)}}^0 = \frac{j}{4\pi} \left( \frac{1}{\sigma} G_{,yy} - \mu_0 G_{,t} \right),$$

где  $G = G(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, 0)$ .

Подставив (37) в (34), можно показать, что для  $H_x^*$  в точке  $z' = z_0$  в момент  $\tau' = T$  ( $t' = 0$ ) выполняются необходимые и достаточные условия локального экстремума (причем это свойство справедливо и для магнитной компоненты «псевдомиграционного» поля  $H_x^p$ , поскольку  $H_x^* = H_x^p$ ):

$$\left. \frac{\partial H_x^*}{\partial z'} \right|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} \equiv 0; \quad \left. \frac{\partial^2 H_x^*}{\partial z'^2} \right|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} \neq 0.$$

Действительно, следуя (24) и (37), можно записать

$$\left. \frac{\partial^2 H_x^*}{\partial z'^2} \right|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} \sim z_0^{-4} \neq 0, \quad \left. \frac{\partial H_x^*}{\partial z'} \right|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} \sim \int_0^T G_{,z} (G_{,zz} - \mu_0 \sigma G_{,t}) dt \equiv 0 \quad (38)$$

(здесь и далее символ « $\sim$ » означает, что выражения приведены с точностью до постоянных коэффициентов).

Таким образом, магнитная компонента «обращенного» поля  $H_x^*$  имеет локальный экстремум в точке, через которую проходит токовая плоскость. При этом фокусировка «обращенного» электромагнитного поля происходит в момент  $\tau' = T$ . В этот момент нам удается определить положение возбудителей поля.

Рассмотрим двумерную ситуацию.

В этом случае можно показать, что экстремальные точки «обращенного» поля (у компонент  $H_x^*$ ;  $E_y^*$ ) следует искать в полупространстве  $z > 0$  на вертикальной оси, проходящей через кабель. Это свойство справедливо также в трехмерном случае и, кроме того, для аналогичных компонент «псевдомиграционного» и миграционного полей, что заметно упрощает изучение экстремальных свойств этих полей.

Итак, пусть  $x' = x_0$  (причем, не ограничивая общности, можно положить  $x_0 = 0$ ) и  $t' = 0$ , тогда выражения (35) запишутся так:

$$H_x^* \sim \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left( z_0^2 - z_0 z' - \frac{4t}{\mu_0 \sigma} \right) t^{-4} \exp \left( -\frac{\mu_0 \sigma}{4t} (2x^2 + z_0^2 + z'^2) \right) dx dt \sim$$

$$\sim (z_0^2 + z'^2)^{-5/2} (2z'^2 + 3z'z_0 - z_0^2), \quad (39)^2$$

$$E_y^* \sim \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ z' + z_0 - \frac{\mu_0 \sigma}{4t} [(x^2 + z_0^2) z' + (x^2 + z'^2) z_0] t^{-4} \times \right.$$

$$\left. \exp \left( -\frac{\mu_0 \sigma}{4t} (2x^2 + z_0^2 + z'^2) \right) \right\} dx dt \sim (z_0^2 + z'^2)^{-7/2} (3z'^3 - 7z'^2 z_0 - 7z' z_0^2 + 3z_0^3). \quad (40)$$

Необходимые условия локального экстремума для функций  $H_x^*$  и  $E_y^*$  приводят соответственно к алгебраическим уравнениям третьего и четвертого порядков:

$$2\alpha^3 + 4\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0, \quad (41)$$

$$12\alpha^4 - 35\alpha^3 - 51\alpha^2 + 35\alpha + 7 = 0, \quad (42)$$

<sup>2</sup> Соотношения (39) и (40) справедливы при  $T \rightarrow \infty$ .



где

$$\alpha = \frac{z'}{z_0}.$$

Нас интересуют лишь положительные корни уравнений (41), (42). Первое из этих уравнений имеет один положительный корень:

$$\alpha_{x1} \cong 0,8,$$

а второе — два:

$$\alpha_{y1} \cong 0,7; \quad \alpha_{y2} \cong 3,8.$$

Отметим, что

$$\left. \frac{\partial^2 H_x^*}{\partial z'^2} \right|_{\substack{\alpha_{x1} \\ t'=0}} \neq 0; \quad \left. \frac{\partial^2 E_y^*}{\partial z'^2} \right|_{\substack{\alpha_{y1}, \alpha_{y2} \\ t'=0}} \neq 0.$$

Следовательно, в точках  $\alpha_{x1}$ ;  $\alpha_{y1}$  и  $\alpha_{y2}$  для компонент «обращенного» поля  $H_x^*$ ;  $E_y^*$  выполняются как необходимые, так и достаточные условия локального экстремума. Запишем координаты этих точек через глубину залегания кабеля  $z_0$ :

$$z_{ax1} \cong 0,8z_0; \quad z_{ay1} \cong 0,7z_0; \quad z_{ay2} \cong 3,8z_0. \quad (43)$$

Условия (43) показывают, что положение кабеля в пространстве однозначно определяется положением локальных экстремумов «обращенного» поля в момент  $t'=T$ . Изменение масштаба по оси  $z$  при продолжении поля в обращенном времени в соответствии с (43) позволит точно локализовать источники аномального поля. Однако электрическая компонента  $E_y^*$  имеет «ложный» экстремум  $z_{ay2} \cong 3,8z_0$ , наличие которого может осложнить интерпретацию в случае, например, небольших значений  $z_0$ . Исключить из рассмотрения этот экстремум «обращенного» поля можно при проведении совместной интерпретации электрической и магнитной компонент:  $H_x^*$  и  $E_y^*$ .

Более точное выделение особенностей «обращенного» продолжения, соответствующих реальным источникам аномального поля, может быть произведено, если в качестве средства интерпретации использовать процедуру миграции электромагнитного поля. В этом случае «обращенное» продолжение осуществляется в среду с некоторой фиктивной электропроводностью  $\sigma^m = c\sigma$ . Оценим величину положительной константы «с» исходя из условия, что экстремум магнитной компоненты миграционного поля  $H_x^m$  совпадает с положением источника (кабеля).

Выполнив вычисления, аналогичные (39) и (40), получим следующие выражения для  $H_x^m$  и  $E_y^m$  (при  $T \rightarrow \infty$ ):

$$H_x^m \sim (z_0^2 + cz'^2)^{-5/2} (2cz'^2 + 3z_0z' - z_0^2), \quad (44)$$

$$E_y^m \sim (z_0^2 + cz'^2)^{-7/2} [z'^3 (c^2 + 2c^3) - z'^2 z_0 (3c + 4c^2) - z' z_0^2 (4c + 3c^2) + z_0^3 (c + 2)]. \quad (45)$$

Очевидно, что при  $c=1$  (44), (45) совпадают с (39), (40). Далее,

$$\left. \frac{\partial H_x^m}{\partial z'} \right|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} \sim z_0^{-4} (1+c)^{-5/2} (c-0,5). \quad (46)$$

Из (46) находим единственное (точное) значение для константы  $c$ :  $c=0,5$ .

Справедливо и обратное утверждение: если  $\sigma^m = 0,5\sigma$ , то единственной точкой, в которой выполняются необходимые и достаточные условия локального экстремума для компоненты миграционного поля, является точка  $z'=z_0$ . Более того, значение  $c=0,5$  является весьма удачным и для  $E_y^m$ .



В этом случае отклонение  $z_{0,y1}$  от  $z_0$  не превышает  $0,07z_0$ , а  $z_{0,y2}=8z_0$ . Расчет константы  $c$ , выполненный специально для  $E_y^m$ , показал, что для точного совпадения  $z_{0,y1}$  с положением кабеля следует брать  $c \approx 0,55$ .

Таким образом, значение  $c=0,5$  можно считать оптимальным для процедуры миграции двумерного поля.

Обратимся к исследованию миграции трехмерного поля. Напомним, что аномальное поле возбуждается горизонтальным электрическим диполем, параллельным оси  $Y$ . Рассчитаем компоненты миграционного поля  $H_x^m$  и  $E_y^m$  на вертикальной полуоси, проходящей через центр диполя при  $t'=0$  ( $T \rightarrow \infty$ ):

$$H_x^m \sim (z_0^2 + cz'^2)^{-3} (cz'^2 + 2z_0z' - z_0^2), \quad (47)$$

$$E_y^m \sim (z_0^2 + cz'^2)^{-4} [z'^3(2c^3 + c^2) - z'^2z_0(5c^2 + 3c) - z'z_0^2(4c^2 + 5c) + z_0^3(c + 3)]. \quad (48)$$

Далее, по уже известной схеме, от уравнений (47) и (48) переходим к алгебраическим уравнениям:

$$2c^2\alpha^3 + 5c\alpha^2 - 4c\alpha - 1 = 0, \quad (49)$$

$$5\alpha^4(2c^3 + c^2) - 6\alpha^3(5c^2 + 3c) - 2\alpha^2(17c^2 + 19c) + 6\alpha(3c + 5) + (4c + 5) = 0. \quad (50)$$

Анализ решений этих уравнений с учетом (47), (48) вновь приводит нас к полученному ранее значению  $c=0,5$ , которое является точным решением (49) (при  $\alpha=1$ ) и весьма близким к точному решению (50). Как видно, имеет место полная аналогия с двумерным случаем, причем она не ограничивается лишь свойствами миграционного поля и распространяется на свойства «псевдомиграционного» поля. Действительно, следуя (36), (37) и (24), можем записать

$$H_x^p \sim \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} (G_{,x0}G_{,x} - G_{,z0}G_{,z} - G_{,yy0}G + \mu_0\sigma G_{,t0}G) dx dy dt,$$

где индекс «0» у функций Грина обозначает поле диполя,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x^p}{\partial z'} \Big|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} &\sim \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} (G_{,x0}G_{,xz} - G_{,z0}G_{,zz} - G_{,yy}G_{,z} + \mu_0\sigma G_{,t0}G_{,z}) dx dy dt \sim (51) \\ &\sim \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} G_{,z} (G_{,xx} + G_{,yy} + G_{,zz} - \mu_0\mu G_{,t}) dx dy dt \equiv 0. \end{aligned}$$

Можно показать, что  $\frac{\partial^2 H_x^p}{\partial z'^2} \Big|_{\substack{z'=z_0 \\ t'=0}} \neq 0$  и, кроме того, точка  $r_0(x_0, y_0, z_0)$  явля-

ется единственной экстремальной точкой  $H_x^p$  в нижнем полупространстве.

Очевидно, что доказательство (51) в двумерном случае проводится аналогично.

Отмеченное свойство «псевдомиграционного» поля  $H_x^p$  примечательно тем, что оно не зависит от интегрирования по времени и по координатной оси, параллельной оси диполя или кабеля (в данном случае — ось  $Y$ ), которые выполняются при вычислении  $H_x^p$ . Из этого следует, например, что для локализации реального трехмерного объекта достаточно зарегистрировать поле на некотором профиле, расположенном вкост оси горизонтального электрического диполя (генерирующего первичное поле), причем лишь для одного момента времени. В этом случае мы можем также говорить о некотором «псевдомиграционном» поле, для определения которого достаточно вычислить лишь одну квадратуру.

Следует подчеркнуть, что полученные выше свойства электромагнитной миграции естественным образом (с помощью метода отражений) перенос-



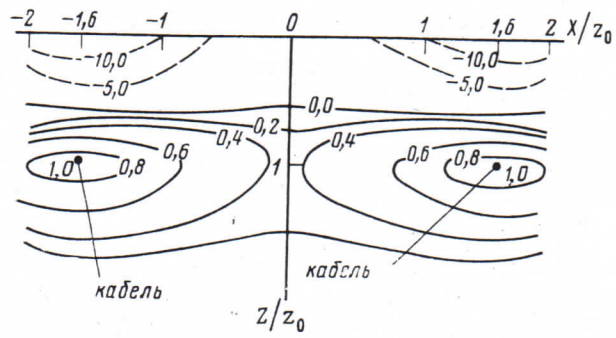


Рис. 1

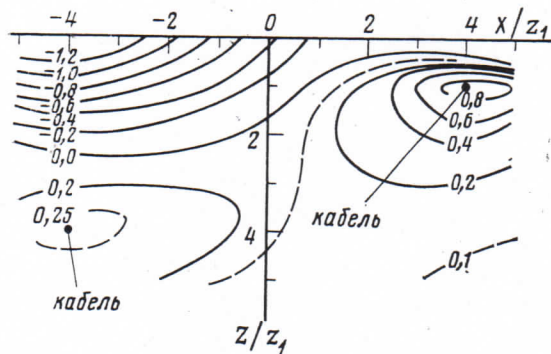


Рис. 2

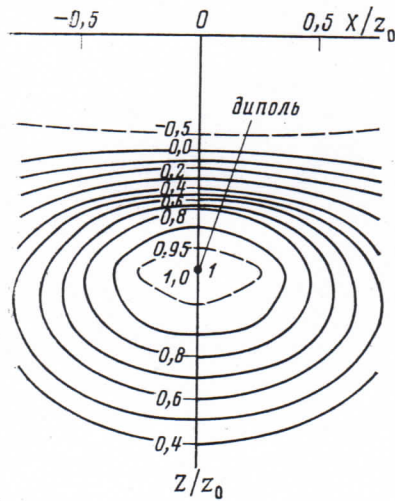


Рис. 3

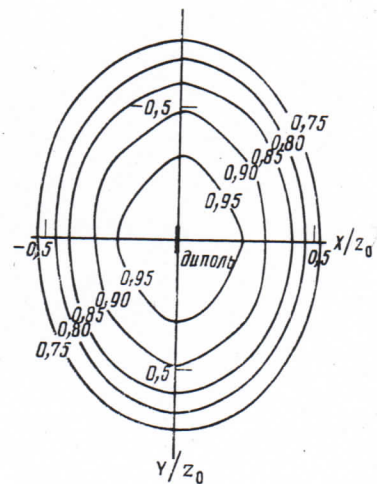


Рис. 4

сятся и на случай, когда возбудители поля погружены в проводящее однородное полупространство, что соответствует реальным геоэлектрическим ситуациям.

7. Миграция модельных электромагнитных полей. Покажем, как проявляются найденные теоретические закономерности при численных экспериментах. Исследуем аномальные поля, создаваемые: 1) бесконечно длинным кабелем или горизонтальным электрическим диполем, погруженными в Землю, ток в которых меняется по закону (33) (или системой бесконечно длинных кабелей, расположенных на одинаковой или разных глубинах); 2) проводящими телами простой геометрической формы, погруженными в

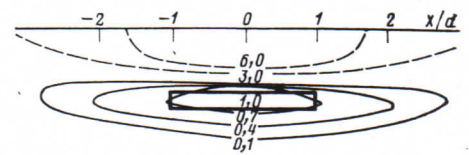
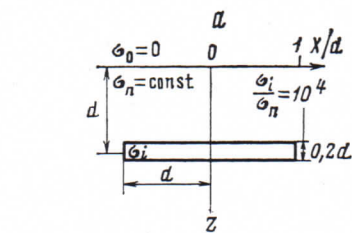


Рис. 6

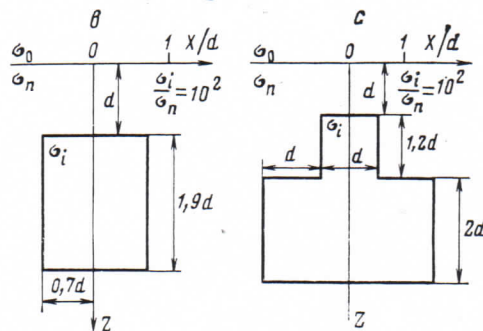


Рис. 5

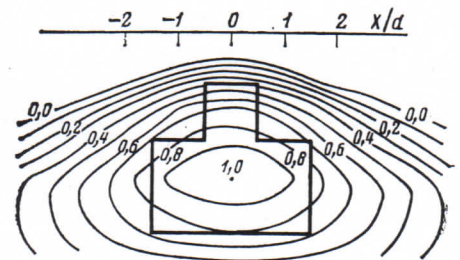


Рис. 7

однородное полупространство с меньшей проводимостью  $\sigma$  (при этом источник первичного поля располагается на поверхности Земли и работает в импульсном режиме, в целях повышения глубинности исследований используется режим импульса включения).

Вычисления проводились по программе «ACORT», реализующей процедуру миграции, а также расчет «псевдомиграционного» поля в двумерном и трехмерном случаях. При построении карт изолиний «обращенного» поля масштаб по оси  $Z$  был изменен в соответствии с (43). Заметим, что при этом пространственная структура миграционного (при  $\sigma^m=0,5\sigma$ ) и «псевдомиграционного» полей качественно не отличается от структуры «обращенного» поля.

Рассмотрим первую серию моделей с элементарными источниками аномального поля.

На рис. 1 и 2 показаны карты изолиний «псевдомиграционного» поля  $H_x^p$  двух кабелей, расположенных на одной глубине (рис. 1) и на разных глубинах (рис. 2). Карты построены для момента  $t'=0$  ( $\tau'=T$ ). Отчетливо видно, что положение источников точно фиксируется по экстремальным точкам  $H_x^p$ .

Хорошее согласие теории с практическими расчетами было продемонстрировано также и в трехмерной ситуации. На рис. 3–4 приведены карты изолиний  $H_x^m$  ( $c=0,5$ ), построенные для момента  $t'=0$  в двух взаимно перпендикулярных плоскостях: а) в плоскости, перпендикулярной оси диполя и проходящей через его центр (рис. 3 –  $H_x^m$ ); б) в горизонтальной плоскости, в которой расположен диполь (рис. 4 –  $H_x^m$ ). Как видно из этих рисунков, положение источника (диполя) в пространстве трех измерений уверенно определяется по экстремальным точкам миграционного поля. Восстановление миграционного поля в более поздние моменты времени, т. е. при  $t' > 0$ , приводит к смещению вверх экстремальных точек и в пределе при  $t' \rightarrow T$  ( $\tau' \rightarrow 0$ ) они стремятся к поверхности наблюдения. Такое поведение миграционного поля может быть качественно объяснено диффузией электромагнитного поля в проводящей среде. При увеличении  $t'$  «включаются» источники аномального поля (работающие в обращенном времени), расположенные ближе к поверхности наблюдения, положение которых и фиксируется при электромагнитной миграции. Таким образом можно просканировать весь геоэлектрический разрез (снизу – вверх), при



этом особенно отчетливо проявляются области с избыточной электропроводностью.

Опишем теперь вторую серию моделей, в которых исходное anomальное поле на поверхности горизонтально-неоднородной Земли рассчитывалось конечно-разностным методом. При этом была использована программа конечно-разностного моделирования (FDM), разработанная в ИЗМИРАН [9]. Для моделирования были выбраны простые геоэлектрические ситуации (рис. 5), а внешнее поле задавалось плоской волной, амплитуда которой менялась по закону импульса включения. Это позволило достаточно быстро вычислять по сеточной программе электромагнитные поля на ряде периодов. Поскольку спектр поля сосредоточен в узком частотном диапазоне и является гладкой функцией частоты, Фурье-преобразование спектра поля выполнялось по несложной вычислительной схеме метода Филона.

На моделях сред, содержащих локальные аномалиеобразующие объекты, были опробованы различные способы миграции электромагнитного поля, учитывающие специфику конкретной модели и свойства миграционного поля.

В модели 1 геоэлектрическая неоднородность представлена тонкой хорошо проводящей горизонтальной полосой (рис. 5, а). В нулевой момент времени ( $t'=0$ ) при электромагнитной миграции проявляются источники anomального поля, сконцентрированные вдоль полосы в горизонтальной плоскости, и по изолиниям миграционного поля<sup>3</sup> удается определить положение и форму аномалиеобразующего объекта (рис. 6). Заметим, что при увеличении  $t'$  экстремальные точки  $E_y^m$  весьма медленно смещаются вверх. Следовательно, растекание избыточных токов, локализованных в полосе, во вмещающую среду происходит медленно и с малой интенсивностью. Это свидетельствует о высокой проводимости локальной неоднородности, значительно превышающей проводимость вмещающей среды. В эксперименте  $\sigma_n=10^{-2}$ ,  $\sigma_i=10^2$  (Ом·м)<sup>-1</sup>.

В моделях 2 и 3 неоднородности образованы: прямоугольной вставкой (рис. 5, б) и вставкой более сложной формы (рис. 5, в). Миграция электромагнитного поля, выполняемая по формулам (28), (29), позволяет проявить в каждый момент времени области геоэлектрического разреза с наибольшими избыточными токами. Поэтому восстановление пространственного распределения миграционного поля выполнялось послойно: поле на каждом уровне восстанавливалось в момент «включения» избыточных токов («источников» поля в слое), отвечающих этому уровню. Время «включения» определялось по выражению для глубины скин-слоя нестационарного поля [10]:

$$d(t) = a\sqrt{2\pi t/\mu_0\sigma}, \quad (52)$$

где  $a$  — некоторая константа, не зависящая от  $t$ ,  $\sigma$  — кажущаяся удельная электропроводность, вычисляемая по (25). Результат такого восстановления для модели 3 представлен на рис. 7. На рисунке отчетливо обозначен локальный экстремум, который можно связать с максимальной интенсивностью индукционных токов. Очевидно, что восстановление общего пространственного распределения миграционного поля в момент времени, отвечающий положению этого экстремума, наиболее информативно.

Действительно, как видно из рис. 8, 9, изолинии  $E_y^m$  достаточно четко отражают положение и форму геоэлектрических неоднородностей. Картина миграционного поля, построенная в другие моменты времени, не является такой выразительной и может привести к ошибке в определении местоположения и формы аномалиеобразующего тела.

<sup>3</sup> Здесь и далее приводятся карты изолиний электрической компоненты миграционного поля  $E_y^m$ , причем константа миграции  $c$  равна:  $c=1$ . На основании опыта практических расчетов мы пришли к выводу, что эта компонента миграционного поля в случае  $E$ -поляризации позволяет получить большую информацию об anomальном объекте по сравнению с магнитными составляющими  $H_x^m$  и  $H_z^m$ .



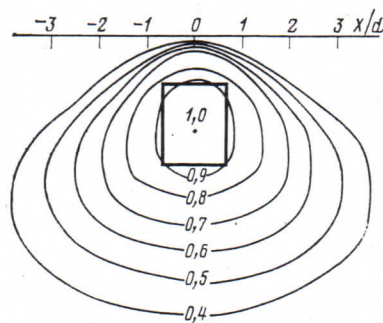


Рис. 8

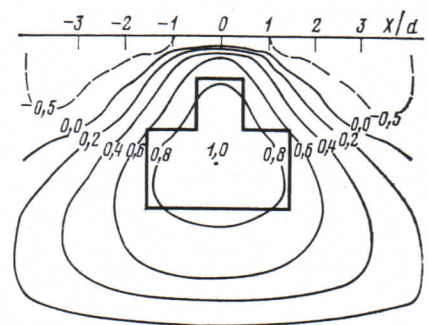


Рис. 9

Способ послойного восстановления обращенного поля может быть модифицирован следующим образом: поскольку интенсивность вторичных источников поля уменьшается с глубиной, то для выравнивания вклада источников, расположенных на разных уровнях, и соответственно для разрешения этих источников при электромагнитной миграции поля, целесообразно пронормировать значения миграционного поля на каждом уровне на его максимальное значение на этом уровне. Такой алгоритм в определенных ситуациях может давать большую детализацию при восстановлении структуры геоэлектрического разреза.

**Заклучение.** Проведенные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что миграция электромагнитного поля может использоваться как весьма эффективный способ решения обратной геоэлектрической задачи, позволяющий восстановить «геоэлектрическое изображение» среды. Укажем основные особенности предлагаемого метода:

- 1) корректность по Тихонову процедуры миграции нестационарного электромагнитного поля;
- 2) простота численной реализации;
- 3) метод может работать с неустановившимися полями как искусственного, так и естественного происхождения;
- 4) для локализации глубинной неоднородности и определения ее формы необходима информация только о наблюдаемом на поверхности Земли электромагнитном поле и о проводимости нормального разреза.

#### Литература

1. Жданов М. С. Продолжение нестационарных электромагнитных полей в задачах геоэлектрики. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1981, № 12, с. 60–69.
2. Жданов М. С., Френкель М. А. О применении обращенного продолжения нестационарных электромагнитных полей при решении обратных геоэлектрических задач. — В сб.: Математические методы в геоэлектрике. М.: ИЗМИРАН, 1982.
3. Zhdanov M. S., Frenkel M. A. The solution of the inverse problems on the basis of the analytical continuation of transient EM-field in the reverse time. — In: Sixth Workshop on EM-induction in the Earth and Moon. Canada: Univ. of Victoria, 1982.
4. Пеграшень Г. И., Нахамкин С. А. Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки. Л.: Наука, 1973, с. 171.
5. Тимошин Ю. В. Импульсная сейсмическая голография. М.: Недра, 1978, с. 286.
6. Berkhout A. J. Seismic migration. Amsterdam – Oxford – N. Y.: Elsevier Scientific Publishing Company, 1980, с. 339.
7. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: Изд-во иност. лит., 1958, с. 930.
8. Бердичевский М. Н., Жданов М. С. Интерпретация аномалий переменного электромагнитного поля Земли. М.: Недра, 1981, с. 328.
9. Zhdanov M. S., Golubev N. G., Spichak V. V. and Varentsov Iv. M. The construction of effective methods for electromagnetic modelling. — Geophys. J. R. astr. Soc., 1982, v. 68, с. 589–607.
10. Макагонов П. П. Скин-эффект при ступенчатом изменении магнитного поля. — Изв. вузов. Сер. Геолог. и разведка, 1977, № 7, с. 127–134.

Академия наук СССР  
Институт земного магнетизма, ионосферы  
и распространения радиоволн

Поступила в редакцию  
8.IV.1983