

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1989

ТОМ 309 № 1

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

© М.С. ЖДАНОВ, В.В. СПИЧАК

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТРЕХМЕРНЫХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
В ГЕОЭЛЕКТРИКЕ

(Представлено академиком Е.П. Велиховым 10 VIII 1988)

1. Анализ и интерпретация результатов площадных электромагнитных зондирований Земли проводится в настоящее время в классе упрощенных (одномерных или двумерных) моделей среды. В этой связи представляет интерес исследование особенностей поведения электромагнитного поля в Земле, характеризующейся трехмерным распределением удельной электропроводности.

В последние 10–15 лет были разработаны различные подходы к решению этой задачи (см., например, обзор [1]). Однако значительные вычислительные трудности, возникающие на отдельных этапах реализации предложенных алгоритмов, осложняют их практическое применение для расчетов электромагнитных полей в трехмерно-неоднородных средах.

В работах [2–4] сформулированы исходные принципы построения алгоритма решения этой задачи, ориентированного на использование ЭВМ с ограниченным объемом оперативной памяти (до 1 мегабайта) и сравнительно небольшим быстродействием (500–1000 тыс. операций в 1 с).

В настоящей работе мы дадим краткое описание этого алгоритма, а также приведем примеры расчетов электромагнитных полей для некоторых типичных трехмерных моделей, в том числе включенных в международный проект сравнения программ численного моделирования электромагнитных полей (COMMEMI) [5].

2. Пусть некоторая область Ω в коре или верхней мантии Земли изотропна, немагнитна ($\mu \equiv \mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума) и характеризуется трехмерным распределением удельной электропроводности $\sigma(x, y, z)$, которую можно представить в виде

$$\sigma(P) = \begin{cases} \sigma(z), & P \in \Omega_1 \\ \sigma(x, z), & P \in \Omega_2, \\ \sigma(x, y, z), & P \in \Omega_3, \end{cases}$$

где $P = P(x, y, z)$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, причем $\Omega_3 \neq \emptyset$. Электромагнитное поле в области Ω индуцируется плоской волной, вертикально падающей на поверхность Земли. Зависимость поля от времени выражена экспоненциальным множителем $\exp(-i\omega t)$.

Необходимо по заданному распределению $\sigma(x, y, z)$ найти электрические и магнитные поля всюду в области $\Sigma = \Omega \cup \Omega_0$, где Ω_0 – область нижней атмосферы, прилегающей к Ω .

3. В диапазоне периодов, представляющем интерес для геоэлектрики, поле в области Σ является квазистационарным и удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$(1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E},$$

$$(2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}.$$

Из уравнений (1), (2) следует уравнение для электрического поля

$$(3) \quad \Delta \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0,$$

где $k = (i\omega\mu_0\sigma)^{1/2}$, $\text{Re } k > 0$.

Беря дивергенцию от обеих частей уравнения (1), получаем

$$(4) \quad \sigma \text{div } \mathbf{E} + (\mathbf{E}, \text{grad } \sigma) = 0.$$

С учетом (4) уравнение (3) принимает вид

$$(5) \quad \Delta \mathbf{E} + \text{grad} \left(\mathbf{E}, \frac{\text{grad } \sigma}{\sigma} \right) + k^2 \mathbf{E} = 0.$$

Для нахождения электромагнитного поля в области Σ необходимо решить краевую задачу относительно поля \mathbf{E} , удовлетворяющего внутри Σ уравнению (5), а затем вычислить \mathbf{H} по формуле (2).

4. Рассмотрим вопрос о выборе краевых условий на границе области Σ . Значения электрического поля или его нормальной производной на границе, вообще говоря, заранее неизвестны. Один из возможных подходов состоит в использовании интегральных краевых условий [6], однако их применение на практике сопряжено с большими вычислительными трудностями. В связи с этим представляет интерес другой тип краевых условий, основанных на неявном учете характера затухания электрического поля вдали от неоднородностей среды. Впервые такие условия были получены для двумерного случая в работе [7], а затем обобщены на трехмерные среды в работах [3, 4, 8]. В частности, в рассматриваемом алгоритме используются следующие асимптотические краевые условия:

$$\left\{ 1 - ikr + r \frac{\partial}{\partial r} \right\} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^n) = 0,$$

где \mathbf{E}^n — "нормальное" электрическое поле, соответствующее случаю, когда $\sigma \equiv \sigma(z)$ для всех $P \in \Sigma$; r — расстояние точек, лежащих на границе области Σ , от начала координат.

5. Как отмечалось в п. 3, магнитное поле \mathbf{H} нетрудно вычислить по найденному электрическому полю, дифференцируя его с помощью конечно-разностной аппроксимации уравнения (2). Однако в областях с большими градиентами электропроводности такой путь приводит к существенным ошибкам в вычислении соответствующих производных электрического поля и в конечном счете к неверным значениям магнитного поля. В частности, при расчете горизонтальных компонент H_x и H_y на поверхности Земли по формуле (2) производные $\partial E_x / \partial z$ и $\partial E_y / \partial z$ определяются неустойчиво. Эту трудность можно обойти, используя интегральные преобразования Гильберта [9]:

$$H_x(x_0, y_0, 0) = H_x^n - (2\pi)^{-1} \iint \frac{H_z(x, y)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{3/2}} dx dy,$$

$$H_y(x_0, y_0, 0) = H_y^n - (2\pi)^{-1} \iint \frac{H_z(x, y)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{3/2}} dx dy,$$

где H_z вычислено предварительно по формуле (2); H_x^n и H_y^n — компоненты "нормального" магнитного поля у поверхности Земли.

6. Для получения дискретных уравнений в узлах пространственной сетки перейдем от непрерывной векторной функции \mathbf{E} к дискретной $U_{l,m,n}$, определенной лишь в узлах этой сетки, и воспользуемся подходом, известным как интегро-

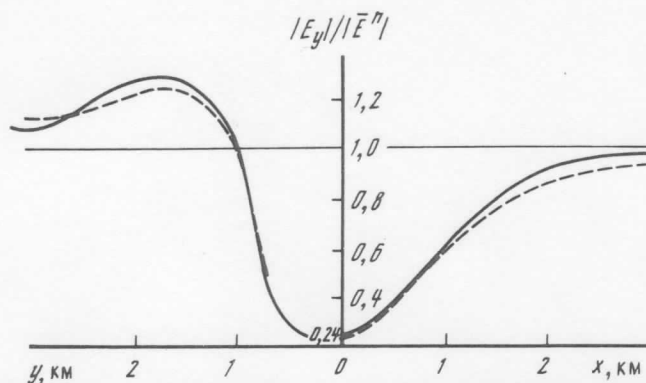


Рис. 1. Сравнение результатов, полученных методом баланса (сплошная линия) и методом интегральных уравнений (штриховая)

интерполяционный метод, или метод баланса [10]. В задачах геоэлектрики он впервые применен в работе [7].

Интегрируя уравнение (5) по объему элементарной ячейки в окрестности узла (l, m, n) , записываем сеточное уравнение баланса токов:

$$(6) \quad \iint_{S_{l,m,n}} \text{grad } U_{l,m,n} ds + \iint_{S_{l,m,n}} \left(U_{l,m,n}, \frac{\text{grad } \sigma_{l,m,n}}{\sigma_{l,m,n}} \right) ds + \\ + \iiint_{V_{l,m,n}} k_{l,m,n}^2 U_{l,m,n} dv = 0,$$

где $l = 1, 2, \dots, L$, $m = 1, 2, \dots, M$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Заменяя в уравнении (6) производные от U и σ конечными разностями и аппроксимируя интегралы по правилу трапеций, мы получаем линейное алгебраическое уравнение, связывающее значения векторной функции U лишь в 7 соседних узлах сетки:

$$(7) \quad U_{l,m,n} = D_{l,m,n}^{(0)-1} \{ D_{l,m,n}^{(1)} U_{l,m,n-1} + D_{l,m,n}^{(2)} U_{l,m-1,n} + \\ + D_{l,m,n}^{(3)} U_{l-1,m,n} + D_{l,m,n}^{(4)} U_{l+1,m,n} + D_{l,m,n}^{(5)} U_{l,m+1,n} + D_{l,m,n}^{(6)} U_{l,m,n+1} \}, \\ l = 1, 2, \dots, L, m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N,$$

где $D_{l,m,n}^i$, $i = 1, 2, \dots, 6$, — матричные коэффициенты размерности (3×3) , определяемые геометрией сетки, распределением электропроводности σ и частотой поля ω .

Матрица системы линейных алгебраических уравнений (7) имеет блочно-ленточную структуру и сильно разрежена. Наиболее эффективными методами решения таких систем являются итерационные методы. В частности, в настоящей работе используется метод блочной верхней релаксации [10].

7. Описанный алгоритм решения задачи реализован в виде пакета программ FDM3D на языке ФОРТРАН-IV [11]. Он характеризуется высоким быстродействием, точностью результатов, адаптацией к размеру оперативной памяти используемой ЭВМ, представлением результатов в виде таблиц, графиков и карт изолиний любой компоненты электрического и магнитного полей в любом сечении пространственной сетки.

Тестирование программ из пакета FDM3D проводилось на моделях, допускающих аналитическое решение [4], а также на моделях, рассчитанных методом интегральных уравнений [12]. На рис. 1 приведены графики компоненты E_y на поверхности Земли, нормированной на поле в отсутствие неоднородности, для модели из

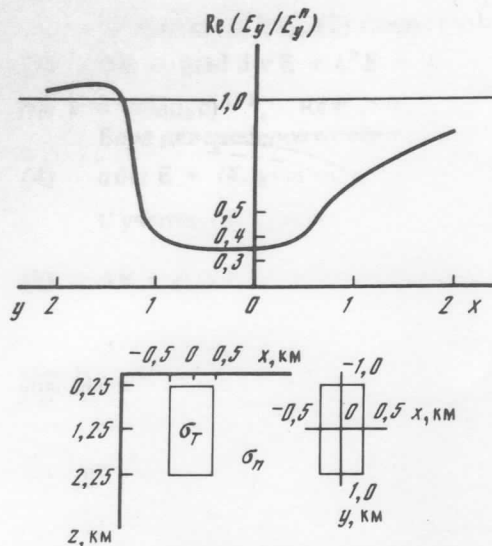


Рис. 2. Модель 3D-1 из проекта COMMEMI; $\sigma_n = 10^{-2}$, $\sigma_T = 2$ См/м

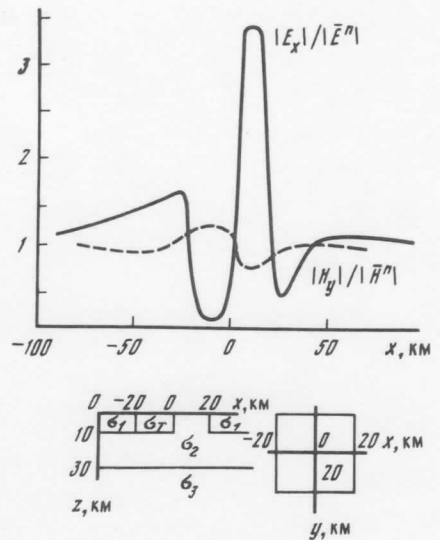


Рис. 3. Модель 3D-2 из проекта COMMEMI; $\sigma_1 = 10^{-1}$, $\sigma_2 = 10^{-2}$, $\sigma_3 = 10$, $\sigma_T = 1$ См/м

рис. 2 (при $\sigma_T = 0,2$ См/м и $\omega = 0,1$ Гц). Как видно из рис. 1, результаты, полученные нами методом баланса, и результаты расчетов методом интегральных уравнений [12] различаются не более чем на 5%. Рассогласование по другим компонентам поля еще меньше. На рис. 2 и 3 представлены некоторые результаты, полученные с помощью пакета программ FDM3D, соответственно для моделей 3D-1 (при $E^n = (0, E_y^n, 0)$ и $\omega = 10$ Гц) и 3D-2 (при $E^n = (E_x^n, 0, 0)$ и $\omega = 10^{-3}$ Гц, координаты профиля: $y = 0$, $z = 0$) из проекта COMMEMI. Время счета и использованная оперативная память ЭВМ ЕС-1060 составляли для этих моделей соответственно: 100 с и 250 кб; 1800 с и 600 кб.

Указанные возможности пакета FDM3D позволяют проводить с его помощью численное моделирование электромагнитных полей в трехмерных средах со сложным распределением удельной электропроводности с минимальными затратами ресурсов ЭВМ и накапливать результаты счета в банке решений.

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Академии наук СССР
Троицк Московской обл.

Поступило
25 VIII 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. Жданов М.С., Спичак В.В. Препринт ИЗМИРАН. М., 1984, № 45 (519). 31 с.
2. Жданов М.С., Спичак В.В. В кн.: Проблемы морских электромагнитных исследований. М., 1980, с. 102–114.
3. Zhdanov M.S. et al. — Geoph. J. Roy. Astron. Soc., 1982, vol. 68, № 3, p. 589–607.
4. Спичак В.В. Автореф. канд. дис. М.: ИЗМИРАН, 1983. 22 с.
5. Zhdanov V.S. et al. In: Proc. of the XIX General Assembly of IUGG. Vancouver, 1987, p. 182.
6. Жданов М.С., Спичак В.В. В кн.: Математическое моделирование электромагнитных полей. М., 1983, с. 4–25.
7. Brewitt-Taylor C.R., Weaver J.T. — Geoph. J. Roy. Astron. Soc., 1976, vol. 47, № 2, p. 375–396.
8. Спичак В.В. В кн.: Электромагнитные зондирования Земли. М., 1985, с. 13–22.
9. Жданов М.С. Аналогии интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М.: Наука, 1984. 326 с.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
11. Спичак В.В. В кн.: Алгоритмы и программы решения прямых и обратных задач электромагнитной индукции в Земле. М., 1983, с. 58–68.
12. Stodt J.A., Hohmann G.W., Ting S.C. — Geophysics, 1981, vol. 46, № 8, p. 1137–1147.